

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ОРГАНИЗАЦИИ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ПЕРЕВОЗОК

Аннотация. В данной статье описывается применение линейного программирования в железнодорожной отрасли, в частности, в организации перевозок, т.к. при поиске оптимального плана перевозки нередко обращаются именно к этому разделу математики. Рассмотрено решение классической транспортной задачи двумя способами: вручную методом потенциалов и с помощью пакета Microsoft Office Excel. Далее проведен анализ между выбранными способами решения транспортной задачи линейного программирования.

Ключевые слова: линейное программирование, транспортная задача, метод потенциалов.

M.I. Zelova ¹, N.A. Kosacheva ¹, T.N. Chernyaeva ¹

¹ Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

APPLICATION OF LINEAR PROGRAMMING IN ORGANIZATION OF RAILWAY TRANSPORTATION

Abstract. This article describes the use of linear programming in the railway industry, in particular, in the organization of transportation, because when looking for optimal service, one often turns to this particular branch of mathematics. The solution of the classical transport task by two methods is considered: manually by the method of potentials and using the Microsoft Office Excel package. Further, an analysis is carried out between the selected methods of the transport linear programming task.

Keywords: linear programming, transport task, potentials method.

Введение

В современное время во многих отраслях производства, в сельском хозяйстве наука уделяет существенное внимание вопросам планирования. Нередко на практике можно встретить с ситуациями, при которых достичь какой-либо результат можно несколькими способами. Естественно, в таком случае выбирается одно решение, в большей степени соответствующее предъявленным требованиям. В математике это часто сводится к задаче оптимизации при определенных ограничениях, условиях, т.е. к нахождению наибольшего или наименьшего значения некоторой функции.

В широко известной области знания – исследовании операций – выделен раздел «Методы оптимизации», и основную часть этого раздела составляют задачи математического программирования [3]. Термин «программирование» в данном случае не следует отождествлять с составлением программы на каком-либо алгоритмическом языке. Математическое программирование подразделяется на линейное и нелинейное, в связи с тем, что его содержание включает в себя теории и методы решения задач о нахождении экстремумов функций на множествах, определяемых линейными и нелинейными ограничениями,

В организации деятельности железнодорожного транспорта часто применяется математический метод линейного программирования.

Постановка задачи линейного программирования (ЗЛП)

Рассмотрим систему m линейных неравенств с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \Lambda + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \Lambda + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \Lambda + a_{3n}x_n \leq b_3, \\ \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \Lambda + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases} \quad (1)$$

и линейную функция этих переменных

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \Lambda + c_nx_n \rightarrow \max(\min). \quad (2)$$

Требуется найти такое неотрицательное решение системы

$$x_j \geq 0, j = 1, \Lambda, n, \quad (3)$$

При котором функция f достигает своего минимального или максимального значения.

Определение 1. Вектор $x = (x = x_1, \Lambda, x_n)$ именуется вектором неизвестных задачи (план).

Определение 2. Вектор-столбец $b = (b_1, b_2, \Lambda, b_m)$ называется вектором ограничений задачи или вектором правых частей.

Определение 3. Вектор-строка $c = (c_1, c_2, \Lambda, c_n)$ называется вектором цели или целевым вектором в ЗЛП.

Определение 4. Совокупность значений x_1, x_2, Λ, x_n , удовлетворяющих системе ограничений и условию не отрицательности, называется допустимым решением (допустимым планом).

Определение 5. Множество допустимых решений задачи линейного программирования называется областью допустимых решений (ОДР).

Различные формы задач линейного программирования

В рамках данной статьи мы укажем на то, что «ЗЛП является частным случаем задачи математического программирования, в которой целевая функция и ограничения линейные». Решить задачу линейного программирования – это значит найти ее оптимальное решение.

Далее рассмотрим три основные формы ЗЛП: общая, стандартная, каноническая. Для более наглядного представления поместим их в виде рисунков (рис.1,2,3):

При выполнении системы k линейных неравенств и $m-k$ линейных уравнений с n переменными:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n &\leq b_3, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &\leq b_k, \\ a_{(k+1)1}x_1 + a_{(k+1)2}x_2 + \dots + a_{(k+1)n}x_n &= b_{k+1}, \\ a_{(k+2)1}x_1 + a_{(k+2)2}x_2 + \dots + a_{(k+2)n}x_n &= b_{k+2}, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

и при условии неотрицательности переменных

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n,$$

линейная функция цели исследуется на максимум (минимум)

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min).$$

Рис.1. Общая форма ЗЛП

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2, \\
 a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n &\leq b_3, \\
 &\dots\dots\dots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m. \\
 x_j &\geq 0, j = 1, \dots, n, \\
 F = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots c_nx_n &\rightarrow \max(\min)
 \end{aligned}$$

Рис.2. Стандартная форма записи ЗЛП

$$\begin{aligned}
 F = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots c_nx_n &\rightarrow \max(\min), \\
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
 a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n &= b_3, \\
 &\dots\dots\dots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \\
 x_j &\geq 0, j = 1, \dots, n,
 \end{aligned}$$

Рис. 3. Каноническая форма ЗЛП

Метод потенциалов в решении транспортной задачи

Метод потенциалов – наиболее простой метод решения транспортной задачи. Потенциалами называют условные числа U_i и V_j , определенным образом относящиеся к каждому поставщику и потребителю.

Различают задачи с закрытой моделью, когда соблюдается баланс между запасами и потребностями $\sum a_i = \sum b_j$, и открытой моделью, когда этот баланс отсутствует $\sum a_i \neq \sum b_j$.

Необходимым и достаточным условием разрешимости транспортной задачи является равенство суммарных запасов суммарным потребностям [3].

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (4)$$

Метод потенциалов применяют для того, чтобы после проверки оптимальности первого полученного опорного плана, при необходимости, перейти к новому более оптимальному опорному плану.

Для того чтобы опорный план транспортной задачи был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия оптимальности системы [5]:

$$1. \quad C_{ij} - (U_i + V_j) = 0 \text{ для } x_{ij} \geq 0 - \text{ для занятых клеток.} \quad (5)$$

$$2. \quad \Delta C_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j) \geq 0, (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}) - \text{ для свободных клеток.} \quad (6)$$

Каждое неравенство в отдельности называется условием потенциальности для соответствующей клетки (i, j) .

Решение транспортной задачи методом потенциалов обязательно должно включать в себя проверку невырожденности плана перевозок;

$$N = m + n - 1 \quad (7)$$

Если выполняется условие (7), то план невырожденный. Обычно принимают $U_1 = 0$, а значения всех остальных потенциалов находят последовательно из уравнений (5) [4].

Если $N = m + n - 1$, то необходимо ввести дополнительное количество занятых клеток с нулевыми перевозками $x_{ij} = 0$.

После этого из соотношений (6) для всех свободных клеток определяется ΔC_{ij} . Оптимальным считается план, при котором все $\Delta C_{ij} \geq 0$. Если полученные значения не удовлетворяют неравенству, то план не оптимален и требуется перераспределение перевозок по циклу.

Цикл строится так, чтобы отрицательные вершины попадали в занятые клетки. За начало цикла принимается клетка с наименьшим отрицательным значением. Данное число прибавляют к положительным вершинам и отнимают от отрицательных.

Наиболее часто используется контур в виде прямоугольника, но встречаются и фигуры другого типа [5].

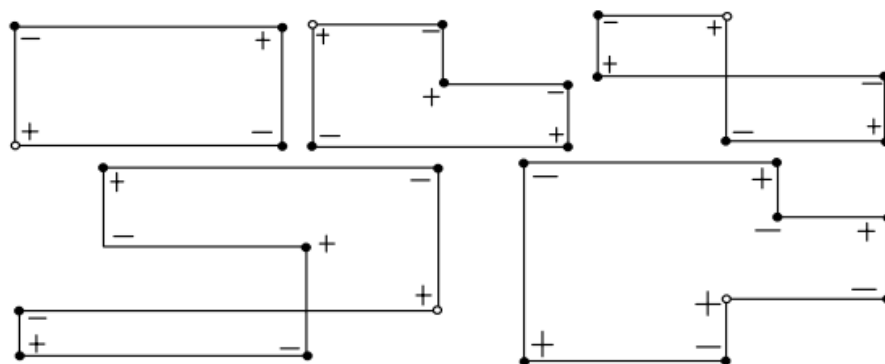


Рис. 4. Виды циклов

После улучшения плана необходимо построить новую таблицу перевозок и проверить оптимальность плана. Если план является оптимальным, то получим оптимальное решение задачи, иначе план улучшают некоторое количество раз.

Рассмотрим классическую транспортную задачу профессиональной направленности, где возможно решение методом потенциалов («вручную») и с помощью пакета Microsoft Office Excel.

Задача. На трех тепловозах 2ТЭ116, 3ТЭ10М и 2ТЭ10М сосредоточены запасы пшеницы в мешках объемов соответственно 45, 60 и 20 т. Крупу необходимо перевезти в четыре пункта назначения: ст. Забитуй, ст. Кутулик, ст. Мысовая и ст. Зима, причем, в каждый из них должно быть завезено соответственно 40, 20, 25 и 40 т пшеницы. Стоимость доставки 1 т пшеницы с тепловоза 2ТЭ116 в пункты назначения соответственно равна 1, 3, 2, 4 ден. ед.; с тепловоза 3ТЭ10М – 2, 1, 4, 3 ден. ед.; с тепловоза 2ТЭ10М – 3, 5, 6, 1 ден. ед. Составить оптимальный план перевозок, при котором цена перевозки (C_{ij}) была наименьшая.

Решение задачи методом потенциалов

Запишем исходные данные в виде таблицы (табл.1).

Табл.1. Исходные данные

	Станция назначения(B_j)				
Тепловозы(A_i)	ст. Забитуй	ст. Кутулик	ст. Мысовая	ст. Зима	Запасы
2ТЭ116	1	3	2	4	45
3ТЭ10М	2	1	4	3	60
2ТЭ10М	3	5	6	1	20
Потребности	40	20	25	40	

Перед началом решения необходимо проверить, закрытая или открытая модель задачи. С помощью формулы (4) определим, что запасы равны потребностям, значит, задача является закрытой:

$$\begin{aligned}\sum a_i &= 125 \\ \sum b_i &= 125 \\ \sum a_i &= \sum b_i\end{aligned}$$

Составим начальный план перевозок, используя метод наименьшей цены и метод северо-западного угла. Согласно первому методу, находим наименьшую цену в таблице = 1. Клеток с таким значением три, поэтому применим второй метод и выберем клетку, которая находится ближе к северо-западному углу. Потребность для столбца, в котором находится данная клетка составляет 40 т., а запасы 45 т., значит, 40 т. можно перевезти. Т.к. груз в первом столбце больше не нужен, в остальные клетки будут иметь нулевое значение. Аналогично, сопоставляя потребности потребителей и запасы поставщиков, найдём остальные значения для клеток, начиная с наименьшей цены и заканчивая наибольшей. На основании полученных данных заполним таблицу (табл.2).

Табл. 2. Сопоставление потребностей и запасов

	Станция назначения(Вj)								
Тепловозы(Аi)	ст. Забитуй		ст. Забитуй		ст. Забитуй		ст. Забитуй		Запасы
2ТЭ116	1	40	3	0	2	5	4	0	45
3ТЭ10М	2	0	1	20	4	20	3	20	60
2ТЭ10М	3	0	5	0	6	0	1	20	20
Потребности	40		20		25		40		

Выполним проверку соответствия суммы во всех столбцах и строках запасам и потребностям.

С помощью формулы (7) рассчитаем значение $N = 6$, количество занятых клеток тоже равно 6, следовательно, план перевозок невырожденный

Проверим оптимальность плана перевозок методом потенциалов. Перечертим таблицу ещё раз, заменив значения запасов и потребностей на потенциалы (табл. 3). Т.к. потенциалы находятся только для занятых клеток, для удобства закрасим их серым цветом. Примем $U_1 = 0$, по формуле (5) рассчитаем остальные потенциалы и занесём полученные значения в таблицу (табл. 3). По формуле (6) найдём ΔC_{ij} для свободных клеток, полученные значения также занесем в таблицу (табл.3).

Табл. 3. Значения U_i , V_j , ΔC_{ij}

	Станция назначения(Bj)								
Тепловозы(Ai)	ст. Забитуй		ст. Забитуй		ст. Забитуй		ст. Забитуй		U _i
2ТЭ116	1	40	3 / 4		2	5	4 / 3		0
3ТЭ10М	2	-1	1	20	4	20	3	20	2
2ТЭ10М	3 / 2		5	6	6 / 4		1	20	0
V _j	1		-1		2		1		

Подставим полученные значения C_{ij} в неравенство (6) и определим, что значение второй клетки первого столбца не удовлетворяет этому неравенству, следовательно, план – не оптимальный и требуется перераспределение перевозок.

Примем эту клетку за начало цикла, т.к. она имеет наименьшее отрицательное значение ΔC_{ij} . Используя контур в виде прямоугольника (рис. 4) построим цикл (табл. 4).

Табл. 4. Построение цикла

	Станция назначения(Bj)								
Тепловозы(Ai)	ст. Забитуй		ст. Забитуй		ст. Забитуй		ст. Забитуй		U _i
2ТЭ116	1 -	40	3	4	2	5	4		0
					+		3		
3ТЭ10М	2	+	-	1	20	4	-	20	2
	1						3	20	
2ТЭ10М	3		5	6	6	4	1	20	0
	2								
V _j	1		-1		2		1		

Выберем значение добавляемой перевозки = 20т. и используем его в выполнении цикла. Начертим таблицу с новыми значениями перевозок (табл. 5).

Выполним проверку нового плана на оптимальность. Аналогично проверке первого плана, найдём потенциалы для занятых клеток и C_{ij} для свободных, внесём данные в таблицу (табл. 5). Подставим новые значения C_{ij} в неравенство (6) и определим, что все значения удовлетворяют этому неравенству, следовательно, получен оптимальный план.

Табл. 5. Улучшенный план

	Станция назначения(Bj)								
Тепловозы(Ai)	ст. Забитуй		ст. Забитуй		ст. Забитуй		ст. Забитуй		Ui
2ТЭ116	1	20	3 / 3		2	25	4 / 2		0
3ТЭ10М	2	20	1	20	4 / 1		3	20	1
2ТЭ10М	3 / 3		5 / 6		6 / 5		1	20	-1
Vj	1		0		2		2		

Рассчитаем суммарные затраты по полученному плану, вычислив сумму произведений цен и перевозок:

$$Z = 1 * 20 + 2 * 20 + 1 * 20 + 2 * 25 + 3 * 20 + 1 * 20,$$

$$Z = 210 \text{ ден.ед.}$$

Решение этой же задачи с помощью пакета Microsoft Office Excel.

Для начала введем исходные данные в ячейки, затем в ячейки F9 и B12 вводим функцию СУММ из категории «Математические», суммируя соответственно ячейки B9:E9 и B9:B11. После растянем формулу от F9 до F11, от B12 до E12. В ячейку D14 вводим формулу =СУММПРОИЗВ(B3:E5;B9:E11), определяющая значение целевой функции. В результате получим число, равное суммарной стоимости всех перевозок, исходя из условия, что объемы поставок равны 1 т. (рис. 5).

	A	B	C	D	E	F
1	Исходные данные					
	Ст. назначения					
2	Тепловозы	ст. Забитуй	ст. Кутулик	ст. Мысовая	ст. Зима	Запасы, т
3	2ТЭ116	1	3	2	4	45
4	3ТЭ10М	2	1	4	3	60
5	2ТЭ10М	3	5	6	1	20
6	Потребн.	40	20	25	40	125=125
7	План перевозок					
	Ст. назначения					
8	Тепловозы	ст. Забитуй	ст. Кутулик	ст. Мысовая	ст. Зима	Запасы, т
9	2ТЭ116	1	1	1	1	4
10	3ТЭ10М	1	1	1	1	4
11	2ТЭ10М	1	1	1	1	4
12	Потребн.	3	3	3	3	125=125
13						
14	Суммарные затраты					

Рис. 5. Исходные данные транспортной задачи в пакете Excel

Используя надстройку *Поиск решения*, мы определим оптимальный план поставок [2]. Необходимые поля заполняем данными, представленными на рис. 6.

Рис. 6. Параметры поиска решения

Таким образом, получаем ответ данной задачи: план перевозки будет оптимальным, если со склада A_1 перевезти в пункты переработки B_1 и B_3 соответственно 20 и 25 т пшеницы; со склада A_2 в B_1 , B_2 и B_4 – 20, 20 и 20 т; со склада A_3 в B_4 – 20 т. Суммарные затраты при этом составят 210 ден. ед. (рис. 7).

	A	B	C	D	E	F
1	Исходные данные					
	Ст. назначения					
2	Тепловозы	ст. Забитуй	ст. Кутулик	ст. Мысовая	ст. Зима	Запасы, т
3	2ТЭ116	1	3	2	4	45
4	3ТЭ10М	2	1	4	3	60
5	2ТЭ10М	3	5	6	1	20
6	Потребн.	40	20	25	40	125=125
7	План перевозок					
	Ст. назначения					
8	Тепловозы	ст. Забитуй	ст. Кутулик	ст. Мысовая	ст. Зима	Запасы, т
9	2ТЭ116	20	0	25	0	45
10	3ТЭ10М	20	20	0	20	60
11	2ТЭ10М	0	0	0	20	20
12	Потребн.	40	20	25	40	125=125
13						
14		Суммарные затраты		210		

Рис. 7. Искомое решение транспортной задачи

Заключение

Линейное программирование широко используется в железнодорожной отрасли. Именно с помощью этого раздела математики выполняется поиск оптимального плана перевозки на этапе ее организации. Научиться решать подобные задачи можно в условиях технического вуза [4], чтобы потом использовать этот навык в профессиональной деятельности.

В результате практического применения двух способов решения транспортной задачи, мы выделили преимущества и недостатки каждого из методов. Решение методом потенциалов (вручную) помогает лучше анализировать каждую конкретную ситуацию, а решение с помощью программы Microsoft Office Excel исключает возможность совершения арифметической ошибки, а значит, лучше подходит для решения более сложных задач и обработки большего объема информации.

Подводя итог, отметим, что авторы данной статьи постарались показать, что линейное программирование имеет широкое практическое применение.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алексеев Е.Р., Павловская Е.В., Чеснокова О.В., Ломовцева О. Решение задач оптимизации и линейного программирования с помощью современных программных средств // Известия ТРТУ. – 2002. – №2(25). С. 231-233
2. Банина Н.В. Экономико-математическое моделирование транспортных процессов : лаб. Практикум / Н.В. Банина. – Иркутск : ИрГУПС, 2017. – 76 с.
3. Бояркина Г. П. Линейное программирование. Динамическое программирование : Учебное пособие. Иркутск, 2003. – 45 с.
4. Миндеева, С. В. Медиакомпетентность как ключевая в техническом вузе : научная статья /С.В.Миндеева - Наука Красноярья. – 2012. - №4(04). 134-140 с.
5. Таирова, Е. В. Линейное программирование : учеб. пособие для студентов всех специальностей / Е. В. Таирова [и др.]; под общ. ред. А. П. Хоменко. – Иркутск: ИрГУПС, 2007. – 75 с.

REFERENCES

1. Alekseev E.R., Pavlovskaya E.V., Chesnokova O.V., Lomovceva O. Reshenie zadach optimizatsii i linejnogo programmirovaniya s pomoshch'yu sovremennyh programmnyh sredstv // Izvestiya TRTU. 2002. No 2(25). pp. 231-233
2. Banina N.V. Ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie transportnyh processov : lab. Praktikum / N.V. Banina. – Irkutsk : IrGUPS, 2017. pp. 76.
3. Boyarkina G. P. Linejnoe programmirovaniye. Dinamicheskoe programmirovaniye : Uchebnoye posobie. Irkutsk, 2003. pp. 45.
4. Mindeeva, S. V. Mediakompetentnost' kak klyuchevaya v tekhnicheskoy vuzе [Media competence as key in a technical University] // *Nauka Krasnoyars'ya*. 2012. No 4(04). pp. 134-140.
5. Tairova, E. V. Linejnoe programmirovaniye : ucheb. posobie dlya studentov vseh special'nostej / E. V. Tairova; pod obshch. red. A. P. Homenko. Irkutsk: IrGUPS, 2007. pp. 75.

Информация об авторах

Зелова Мария Игоревна, студентка 2-го курса факультета «Управление на транспорте и информационные технологии», специальность «Эксплуатация железных дорог», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: m.zelova@yandex.ru

Косачева Нели Александровна, студентка 2-го курса факультета «Управление на транспорте и информационные технологии», специальность «Эксплуатация железных дорог», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: neli.kosacheva@mail.ru

Черняева Татьяна Николаевна, к.ф.-м.н., доцент кафедры «Математика», Иркутский государственный университет путей и сообщения, г. Иркутск, e-mail: chetn2021@yandex.ru

Authors

Zelova Maria Igorevna – student, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: m.zelova@yandex.ru

Kosacheva Neli Alexandrovna – student, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: neli.kosacheva@mail.ru

Chernyaeva Tatyana Nikolaevna – candidate of Physical and Mathematical sciences, associate professor Subdepartment of Mathematics, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: chetn2021@yandex.ru

Для цитирования

Зелова М.И. Применение линейного программирования в организации железнодорожных перевозок [Электронный ресурс] / М. И. Зелова, Н. А. Косачева, Т. Н. Черняева // Молодая наука Сибири: электрон. науч. журн. — 2021. — №12. — Режим доступа: <http://mnv.irkups.ru/toma/121-2021>, свободный. — Загл. с экрана. — Яз. рус., англ. (дата обращения: 07.06.2021)

For citation

Zelova M.I., Kosacheva N.A., Chernyaeva T.N. *Application of linear programming in organization of railway transportation. Molodaya nauka Sibiri: ehlektronnyj nauchnyj zhurnal* [Young science of Siberia: electronic scientific journal], 2021, no. 12. [Accessed 07/06/21]