

И. И. Тихий¹, М.В. Зуев¹

¹ Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Российская Федерация

ВЫБОР ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ РАСЧЕТЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ

Аннотация. В статье на примере дважды статически неопределимой рамы рассмотрены все возможные виды основных систем метода сил. Проанализирована возможность использования мгновенно изменяемых систем. Даны рекомендации для выбора оптимальной основной системы по критерию трудоёмкости и точности расчётов.

Ключевые слова: строительная механика, статически определимые и неопределимые системы, основная система, геометрически неизменяемая система, геометрически изменяемая система, мгновенно изменяемая система, метод сил, каноническое уравнение метода сил.

I. I. Tikhii¹, M. V. Zuev¹

¹ Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation

SELECTION OF THE BASIC SYSTEM WHEN CALCULATING STATICALLY INDETERMINATE FRAMES

Abstract. In the article, using the example of a twice statically indeterminate frame, all possible types of the basic systems of the force method are considered. The possibility of using instantly changeable systems is analyzed. Recommendations are given for choosing the optimal basic system based on the criteria of labor intensity and accuracy of calculations.

Keywords: construction mechanics, statically definable and indefinable systems, basic system, geometrically immutable system, geometrically changeable system, instantaneously changeable system, force method, canonical equation of the force method.

В строительной механике для расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость на основе внешних нагрузок и геометрических характеристик системы составляются уравнения, необходимые для определения реакций в связях. В зависимости от количества неизвестных реакций, подлежащих определению, системы делятся на два типа:

- статически определимые – те, для решения которых достаточно использовать только уравнения статики, и

- статически неопределимые системы с лишними связями, в которых помимо уравнений статики используются уравнения перемещений.

Лишние связи не нарушают геометрическую неизменяемость конструкции, но повышают её жесткость.

Для расчета статически неопределимых систем в строительной механике используются два метода: метод перемещений (определение перемещений системы после деформации) и метод сил (нахождение неизвестных усилий в лишних связях).

В данной работе рассмотрим особенности использования метода сил. Метод сил в общем виде предполагает выполнение следующих этапов:

- составление расчетной схемы и проведение ее кинематического анализа;
- выбор основной системы метода сил;
- составление системы канонических уравнений;
- построение «единичных» и «грузовых» эпюр;

- вычисление коэффициентов, свободных членов системы канонических уравнений и её решение;

- построение итоговых эпюр изгибающих моментов, продольных и поперечных сил.

Один из важных этапов в методе сил является выбор основной системы, которая предполагает замену в заданной расчётной схеме реакций в лишних связях на неизвестные силы и моменты. При этом, возможны несколько вариантов замены и соответственно несколько вариантов основных систем. Поэтому возникает задача выбора такой основной системы, которая позволит решить задачу оптимальным способом.

В общем случае, при составлении основной системы можно получить три вида систем: геометрически изменяемые, мгновенно изменяемые и геометрически неизменяемые системы.

Геометрически изменяемые системы не являются строительными конструкциями и, следовательно, не подлежат расчёту по условию постановки задачи. По определению в качестве основных используются геометрически неизменяемые системы, среди которых необходимо выбрать ту, которая потребует наименьшее количество вычислительных затрат на её расчёт.

Рассмотрим решение этой задачи на примере расчёта статически определимой рамы. Кроме того, проанализируем возможность использования в качестве основных мгновенно изменяемых систем.

Анализ примера расчета статически неопределимых рам методом сил.

Выберем схему со 2-мя степенями статической неопределимости (рис. 1), у которой длина ригелей $a=4$ м; длина стоек $b=3$ м; внешние силы представлены моментом $m=12$ кН·м; и распределенной нагрузкой $q=8$ кН/м; $J_P = 2J$; $J_C = 4J$;

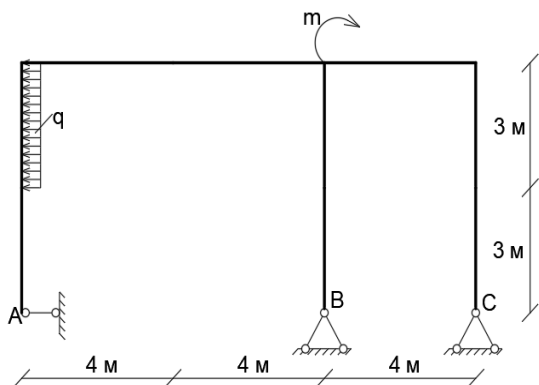


Рис. 1. Заданная схема

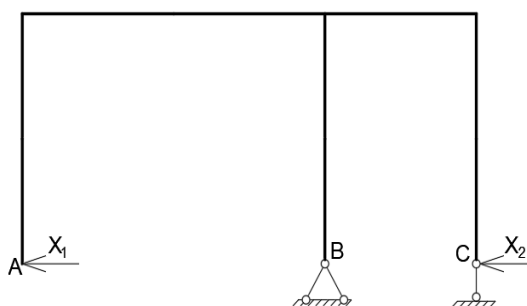


Рис. 2. Выбранная основная система.

Вариант 11

Для определения общего количества основных систем, в которых реакции в лишних связях заменяются единичными воздействиями (число которых зависит от степени статической неопределимости рамы и равняется 2), можно воспользоваться формулами комбинаторики, а именно формулой сочетаний [1]:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}.$$

В соответствии с этой формулой, число сочетаний для заданной системы равно:

$$C_5^2 = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = 10$$

Таким образом, на основе заданной можно составить 10 основных систем (рис. 3-12),

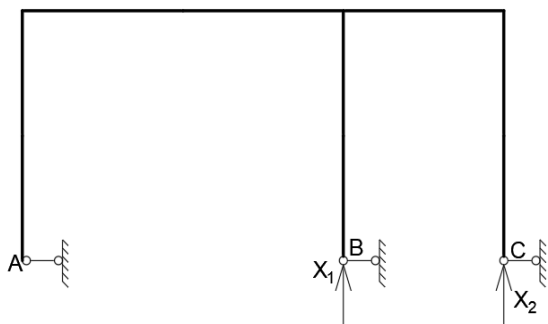


Рис. 3. Вариант 1

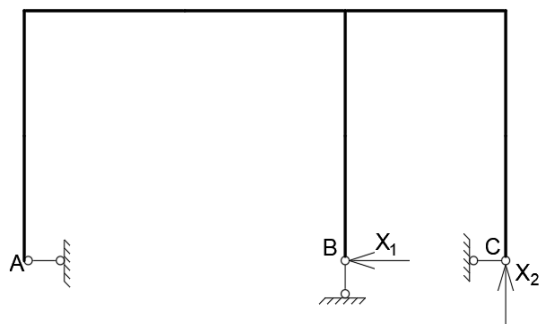


Рис. 4. Вариант 2

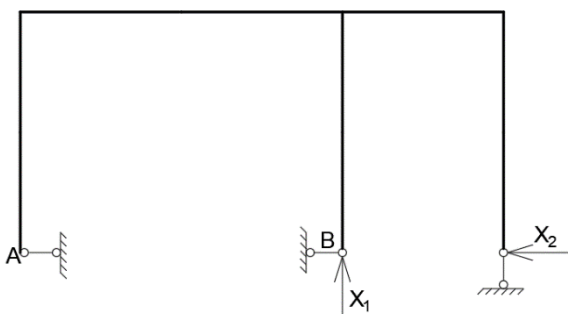


Рис. 5. Вариант 3

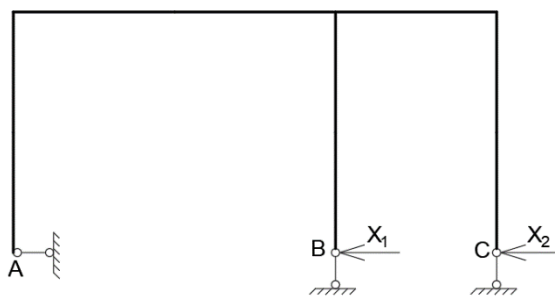


Рис. 6. Вариант 4

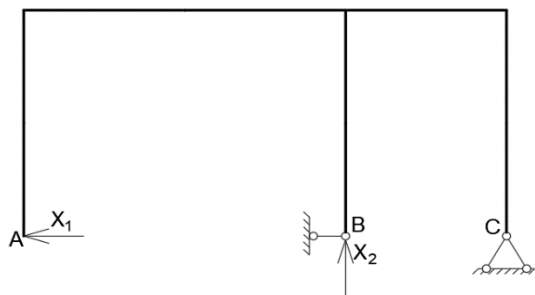


Рис. 7. Вариант 5

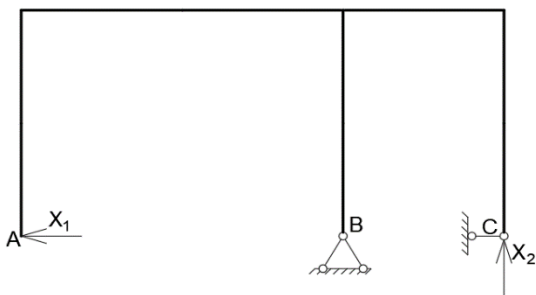
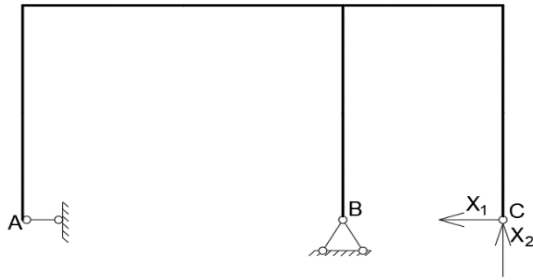


Рис. 8. Вариант 6



Р ис. 9. Вариант 7

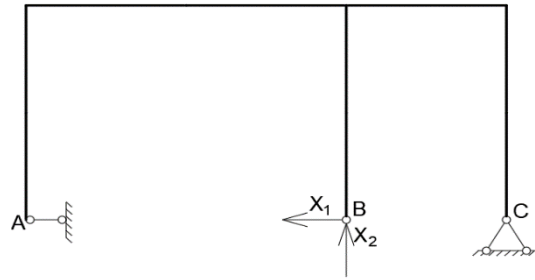


Рис. 10. Вариант 8

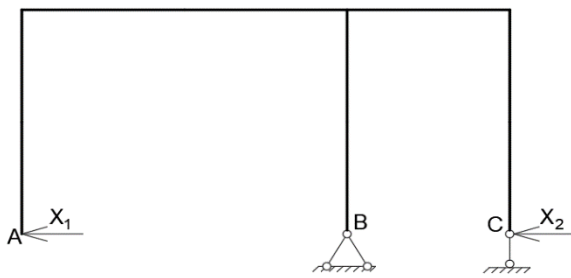


Рис. 11. Вариант 9

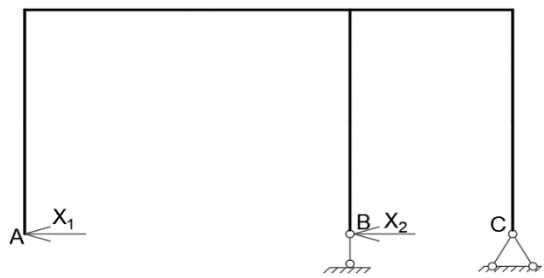


Рис. 12. Вариант 10

среди них: 1 геометрически изменяемая система, использование которой невозможно по условию задачи (рис. 3), 7 мгновенно изменяемых систем (рис. 6-10), 2 геометрически неизменяемых системы (рис. 11-12)

В начале проведем расчет заданной рамы с использованием основной системы (вариант 9,) представленной на рис. 2.

Для выбранной ОСМС составляется система канонических уравнений вида:

$$\begin{cases} x_1 \cdot \delta_{11} + x_2 \cdot \delta_{12} + \Delta_{1p} = 0 \\ x_1 \cdot \delta_{21} + x_2 \cdot \delta_{22} + \Delta_{2p} = 0 \end{cases};$$

Для вычисления коэффициентов и свободных членов системы уравнений строятся эпюры изгибающих моментов \bar{M}_1 (рис. 14) и \bar{M}_2 (рис. 15), от соответствующих единичных воздействий X_1 и X_2 , а также эпюра от действующих нагрузок M_p (рис. 13).

Для построения грузовой эпюры M_p предварительно были вычислены опорные реакции.

$$\begin{aligned} \sum M_{iB} = 0; 1,5qb^2 - m - a \cdot V_C = 0; V_C &= \frac{1,5 \cdot 8 \cdot 9 - 12}{4} = 24 \text{ кН}; \\ \sum M_{iC} = 0; 1,5qb^2 - m - a \cdot V_B = 0; V_B &= \frac{1,5 \cdot 8 \cdot 9 - 12}{4} = 24 \text{ кН}; \\ \sum F_{iX} = 0; H_B - bq = 0; H_B &= 8 \cdot 3 = 24 \text{ кН}; \end{aligned}$$

Вычисления коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений

осуществлялись с использованием интеграла Мора.

Рассчитанные значения подставлены в систему канонических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \cdot \frac{180}{EJ} + x_2 \cdot \frac{18}{EJ} + \frac{1336,5}{EJ} = 0 \\ x_1 \cdot \frac{18}{EJ} + x_2 \cdot \frac{108}{EJ} + \frac{1008}{EJ} = 0 \end{array} \right\};$$

Решением системы уравнений являются значения: $x_1 = -6,602$ и $x_2 = -8,233$

Итоговая эпюра $M_{\text{итог}}$ (рис. 16) строится путем суммирования грузовой эпюры и единичных, умноженных на вычисленные ранее неизвестные.

Эпюры Q (рис. 17) и N (рис.18) построены по результатам $M_{\text{итог}}$.

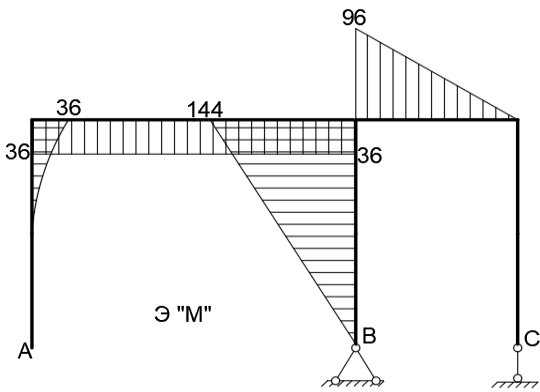


Рис. 13. Грузовая эпюра M_p .

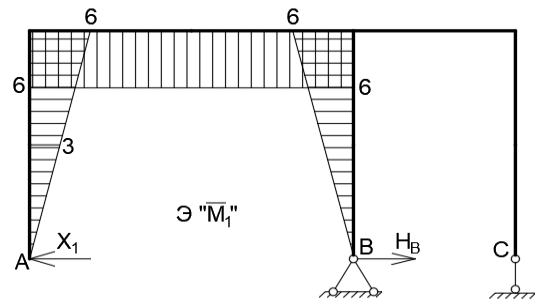


Рис. 14. Единичная эпюра \bar{M}_1 .

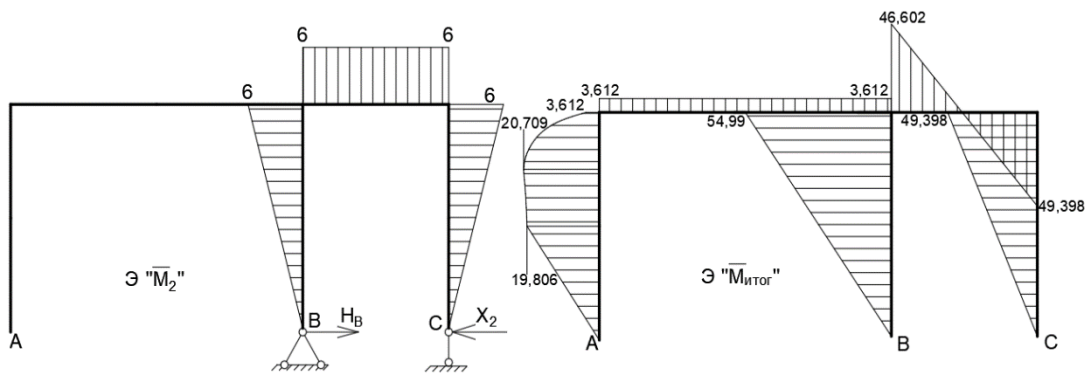


Рис. 15. Единичная эпюра \bar{M}_2 .

Рис. 16. Итоговая эпюра моментов M

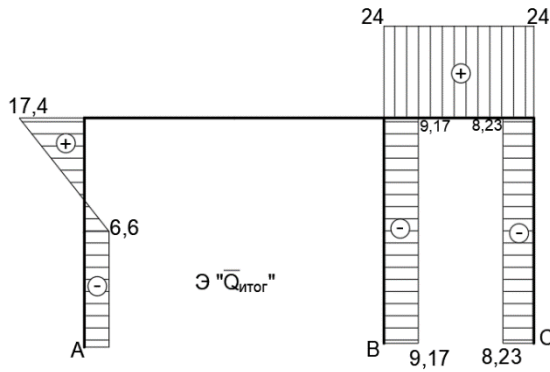


Рис. 17. Итоговая эпюра поперечных сил

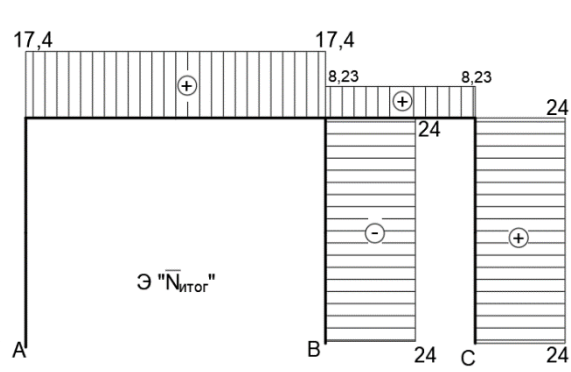


Рис. 18. Итоговая эпюра продольных сил

Далее решим поставленную задачу расчета рамы с использованием **другого варианта основной системы (вариант 10)**, которая так же является геометрически неизменяемой.

Результаты расчетов опорных реакций при построении грузовой эпюры:

$$\begin{aligned} \sum M_{iB} = 0; 1,5qb^2 - m - a \cdot V_C = 0; V_C &= \frac{1,5 \cdot 8 \cdot 9 - 12}{4} = 24 \text{ кН}; \\ \sum M_{iC} = 0; 1,5qb^2 - m - a \cdot V_B = 0; V_B &= \frac{1,5 \cdot 8 \cdot 9 - 12}{4} = 24 \text{ кН}; \\ \sum F_{iX} = 0; H_C - bq = 0; H_C &= 8 \cdot 3 = 24 \text{ кН}; \end{aligned}$$

Вычисление коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений ведется аналогично первому примеру. Грузовая и единичные эпюры представлены на рис. 19-21. Вычисленные значения подставляются в систему канонических уравнений.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \cdot \frac{252}{EJ} + x_2 \cdot \frac{90}{EJ} + \frac{2495,25}{EJ} = 0 \\ x_1 \cdot \frac{90}{EJ} + x_2 \cdot \frac{108}{EJ} + \frac{1584}{EJ} = 0 \end{array} \right\};$$

Решением системы уравнений являются значения: $x_1 = -6,64$ и $x_2 = -9,13$.

С использованием вычисленных значений неизвестных строятся итоговые эпюры M (рис. 22), Q (рис. 23) и N (рис. 24).

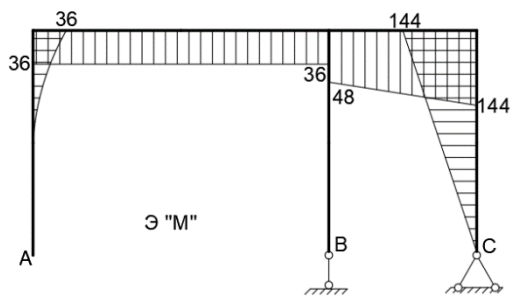


Рис. 19. Грузовая эпюра M_p .

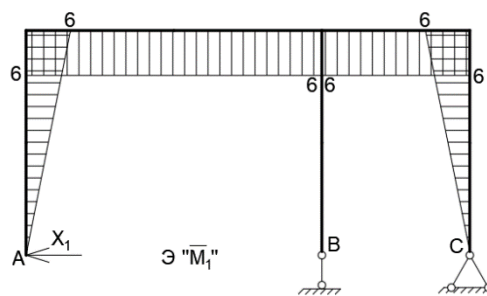


Рис. 20. Единичная эпюра \bar{M}_1 .

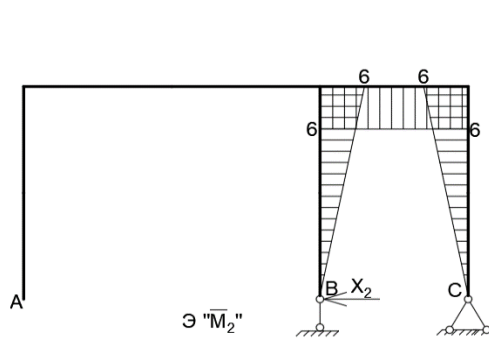


Рис. 21. Единичная эпюра \bar{M}_2 .

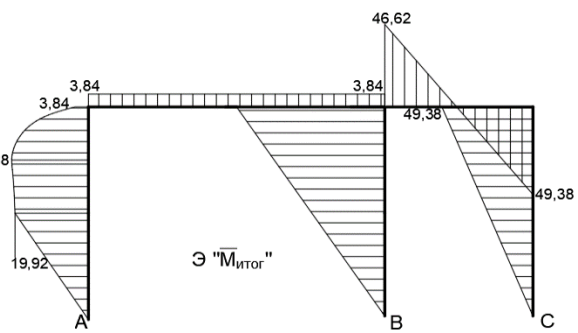


Рис. 22. Итоговая эпюра моментов M

Сравнение результатов расчётов заданной рамы в виде эпюр M , Q и N , выполненных с использованием двух различных геометрически неизменяемых основных систем показало их идентичность. Несущественные различия вызваны погрешностями округления значений величин.

Далее рассмотрим **возможность использования ОСМС с кинематическими свойствами мгновенно изменяемых систем.**

В качестве примера из 7 возможных вариантов были выбраны 6 и 7.

В соответствии с методикой применения метода сил, необходимо построить единичные и грузовую эпюры. Для построения грузовой эпюры предварительно были вычислены опорные реакции.

$$\sum M_{iA} = 0; \quad 1,5qb^2 - m + 2a \cdot V_B = 0 \quad V_B = \frac{1,5 \cdot 8 \cdot 9 - 12}{8} = 9,3 \text{ кН};$$

$$\sum F_{iY} = 0; \quad V_B = 0 \text{ кН};$$

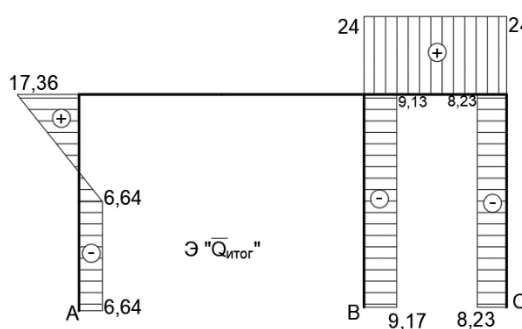


Рис. 23. Итоговая эпюра поперечных сил

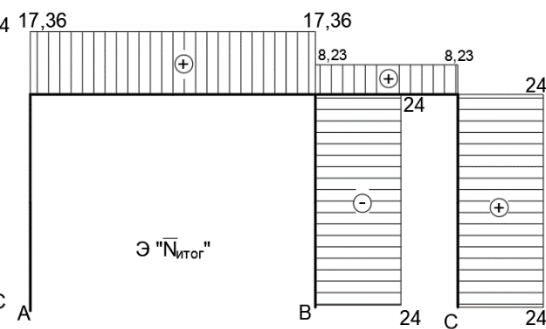


Рис. 24. Итоговая эпюра продольных сил

Из приведенных уравнений следует, что рассматриваемые в качестве основных мгновенно изменяемые системы являются не уравновешенными, так как сумма сил по оси Y не равна нулю.

Полученный результат вытекает из определения понятия мгновенно изменяемой системы, как системы, в которой возможны предельно малые перемещения без деформации ее элементов [2]. Эти перемещения происходят за короткий промежуток времени (мгновение).

В рассматриваемых примерах эти мгновенные перемещения в вертикальном направлении возникают в горизонтальных опорах и ограничиваются действием опор в этом

же направлении. Возможная реакция горизонтальной опоры в вертикальном направлении не учитывается в принятой модели опор.

Таким образом при использовании в качестве основной мгновенно изменяемой системы возникают дополнительные реакции во внутренних и внешних связях, которые не учитываются при составлении первоначальной модели системы. Это приводит к тому, что основная система становится статически неопределимой.

Вывод: таким образом проведенные исследования показали нецелесообразность использования в качестве основных мгновенно изменяемых систем в расчете статически неопределимых систем методом сил.

Использование различных вариантов основных геометрически неизменяемых систем не влияет на точность вычислений. Вместе с тем для сокращения вычислительных затрат рекомендуется выбирать основные системы, которые содержат после преобразования расчетной схемы наибольшее количество консольных частей. При этом желательно, чтобы распределенные нагрузки находились на этих консолях.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. 1969. С. 41–44.
2. Дарков А. В., Шапошников Н. Н. Строительная механика: Учебник. 12 е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2010. - 656 с.

REFERENCES

1. Vilenkin N. Ya. Combinatorics. 1969. pp. 41-44.
2. Darkov A.V., Shaposhnikov N. N. Construction mechanics: Textbook. 12th ed., erased. - St. Petersburg: Publishing house "Lan", 2010. - 656 p.

Информация об авторах

Тихий Иван Иванович – д.т.н., профессор, профессор кафедры «Физика, механика и приборостроение», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: tiviv@list.ru

Зуев Михаил Владимирович – студент 3 курса по специальности «Строительство железных дорог, мостов и транспортных тоннелей», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: mikhael.zuev.00@list.ru

Authors

Tikhy Ivan Ivanovich - Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department "Physics, Mechanics and Instrument Engineering", Irkutsk State University of Railway Transport, Irkutsk, e-mail: tiviv@list.ru

Zuev Mikhail Vladimirovich - 3rd year student in the specialty "Construction of railways, bridges and transport tunnels", Irkutsk State University of Railway Transport, Irkutsk, e-mail: mikhael.zuev.00@list.ru

Для цитирования

Тихий И.И. Выбор основной системы при расчете статически неопределимых рам [Электронный ресурс] / И. И. Тихий, М. В. Зуев // Молодая наука Сибири: электрон. науч. журн. — 2021. — №12. — Режим доступа: <http://mnv.ircgups.ru/toma/121-2021>, свободный. — Загл. с экрана. — Яз. рус., англ. (дата обращения: 07.06.2021)

For citation

Tikhiy I. I., Zuev M. V. *Sselection of the basic system when calculating statically*

indeterminate frames. Molodaya nauka Sibiri: ehlektronnyj nauchnyj zhurnal [Young science of Siberia: electronic scientific journal], 2021, no. 12. [Accessed 07/06/21]