УДК *512.64*

Е. А. Кононов [1], М. А. Нифедов [1], О. Д. Толстых [1]

[1] Иркутский государственный университет путей сообщений, г. Иркутск, Российская Федерация

МЕТОД ХАЛЕЦКОГО И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ НА ЯЗЫКЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ JAVA В СРЕДЕ РАЗРАБОТКИ NEATBEANS

Аннотация. *Данная статья посвящается методу Халецкого решения линейных алгебраических систем. Для программной реализации схемы Халецкого была рассмотрена и решена система четырех уравнений с четырьмя неизвестными. В статье представлены фрагменты кода программы, написанной на языке Java в среде разработки NeatBeans. Программа позволяет решить систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Для работы с программой разработан пользовательский интерфейс. Работа программы была проверена на приведенном в статье контрольном примере. Приведен анализ времени решения системы методом Халецкого в сравнении с методами Гаусса, Матричным.*

Ключевые слова: *система линейных алгебраических уравнений, метод Халецкого, интерфейс, схема Халецкого, язык программирования Java, анализ времени решения, листинг программы.*

E. A. Kononov [1], M. A. Nifedov [1], O. D. Tolstykh [1]

[1] Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation

THE HALETSKY METHOD AND ITS IMPLEMENTATION IN THE JAVA PROGRAMMING LANGUAGE IN THE NEATBEANS DEVELOPMENT ENVIRONMENT

Abstract. *This article is devoted to the Haletsky method for solving linear algebraic systems. For the software implementation of the Haletsky scheme, a system of four equations with four unknowns was considered and solved. The article presents code snippets of a program written in Java in the NeatBeans development environment. The program allows you to solve a system of four equations with four unknowns. A user interface has been developed for working with the program. The operation of the program was tested on the control example given in the article. The analysis of the time of the solution of the system by the Haletsky method in comparison with the Gaussian methods, the Matrix method, is given.*

Keywords: *system of linear algebraic equations, Haletsky method, interface, Haletsky scheme, Java programming language, solution time analysis, program listing***.**

Введение

Многие реальные процессы в различных областях естествознания описываются системами линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Поэтому весьма актуальна задача описания области применения известных методов решения СЛАУ в прикладных задачах [1], [4], [5], [6]. Современные компьютеры предоставляют мощные возможности для выполнения счетной работы. Для хорошо изученных методов решения СЛАУ, таких, как метод Гаусса, Крамера, матричный, Зейделя и др., существуют их реализации в различных пакетах прикладных программ (например, Microsoft Office Excel, Mathcad). Одним из интересных и эффективных методов решения СЛАУ является метод Халецкого. Этот метод выделяется на фоне других популярных методов. Схема метода впервые была предложена французским математиком польского происхождения Андре-Луи Холецким (Халецким) в начале 19 века и эффективно применялась во время первой мировой войны в геодезических изысканиях, в разработках картографических проекций. Впервые схема Халецкого была использована для положительно определённых симметричных матриц. В последствии возможности применения метода Халецкого расширились [1], [6].

В данной статье метод рассмотрен для систем с произвольной матрицей. Здесь представлена реализация метода на языке программирования Java в среде разработки

NeatBeans. Проведен анализ времени решения системы методом Халецкого по созданной программе в сравнении с методами Гаусса и матричным.

Метод Халецкого

Пусть требуется решить систему, состоящую из n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 = a_{1,n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 = a_{2,n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n = a_{n,n+1}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Запишем её в матричном виде

$$Ax = b, \quad \text{где} \quad A = \left\| a_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n}, \quad x = (x_i)_{i=1}^{n}, \quad b = (b_i)_{i=1}^{n} \equiv (a_{i,n+1})_{i=1}^{n}. \tag{1.2}$$

Суть метода Халецкого состоит в представлении матрицы системы произведением матриц B и C треугольного относительно главной диагонали вида: матрица B - нижняя треугольная, а C - верхняя треугольная матрица, у которой элементы главной диагонали равны 1.

$$A = B \cdot C, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & 1 & c_{23} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Можно показать, что при этом выполняются следующее соотношения:

$$b_{i1} = a_{i1}, \quad (i = \overline{1,n}), \quad b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}c_{kj}, \quad (1 < i \le j); \tag{1.4}$$

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{b_{11}} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad (j = \overline{1,n}), \quad c_{ij} = \frac{1}{b_{ii}} \cdot (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}c_{kj}), \; (1 < i < j). \tag{1.5}$$

Тогда решение данной системы $Ax = BCx = b$ может быть сведено к решению двух треугольных систем

$$By = b, \; Cx = y. \tag{1.6}$$

Можно убедиться, что решения этих систем [1], [6] определяются формулами

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{b_1}{b_{11}} = \dfrac{a_{i,n+1}}{b_{11}}, \\ y_i = \dfrac{1}{b_{ii}}(b_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} b_{ik}y_k) = \dfrac{1}{b_{ii}}(a_{i,n+1} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} b_{ik}y_k), \quad i = \overline{2,n}, \quad (i > 1); \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\begin{cases} x_n = y_n, \\ x_i = y_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} c_{ik}x_k, \quad 1 \le i < n. \end{cases} \tag{1.8}$$

Из (1.7) можно заметить, что решение y_i удобно находить вместе с элементами c_{ij}.

Особенно удобен метод Халецкого, если матрица A симметрическая [2], [3], [6], [7]. *Напомним основное свойство симметрической квадратной матрицы: её элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны:* $a_{ik} = a_{ki}$.

В этом случае

$$c_{ij} = \frac{b_{ji}}{b_{ii}} \ (i \leq j).$$

Для программной реализации метода Халецкого, пользуясь формулами (1.4) - (1.8), опишем подробно приведенную схему для системы четвертого порядка

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 = a_{15}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 = a_{25}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 = a_{35}, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 = a_{45}. \end{cases} \tag{1.1*}$$

Вычислим матрицу $A = BC$ как произведение матриц B и C следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & 1 & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.2*}$$

Результат перемножения матриц:

$$A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{11}c_{12} & b_{11}c_{13} & b_{11}c_{14} \\ b_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22} & b_{21}c_{13} + b_{22}c_{23} & b_{21}c_{14} + b_{22}c_{24} \\ b_{31} & b_{31}c_{12} + b_{32} & b_{31}c_{13} + b_{32}c_{23} + b_{33} & b_{31}c_{14} + b_{32}c_{24} + b_{33}c_{34} \\ b_{41} & b_{41}c_{12} + b_{42} & b_{41}c_{13} + b_{42}c_{23} + b_{43} & b_{41}c_{14} + b_{42}c_{24} + b_{43}c_{34} + b_{44} \end{pmatrix}.$$

Стало быть, первый столбец матрицы *B* совпадает с первым столбцом матрицы *A:*

$$b_{i1} = a_{i1}, \quad i \geq 1 \quad (i = \overline{1,4}); \tag{1.4.1}$$

первая строка матрицы C получается из первой строки матрицы *A*, деленной на элемент b_{11}=a_{11}:

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{b_{11}}, \quad j \geq 1 \quad (j = \overline{1,4}). \tag{1.5.1}$$

Второй столбец матрицы *B:* второй столбец *A* минус первый столбец *B*, умноженный на c_{12}, начиная с i=2:

$$b_{i2} = a_{i2} - b_{i2}c_{12}, \quad i \geq 2; \tag{1.4.2}$$

вторая строка матрицы *C* есть разность второй строки *A* и первой строки *C*, умноженной на b_{21}, и всё это делённое на b_{22}, начиная с третьего элемента:

$$c_{2j} = \frac{1}{b_{22}}(a_{2j} - b_{21}c_{1j}), \quad j \geq 3. \qquad (1.5.2)$$

Третий столбец матрицы *B:* третий столбец *A* минус произведение *i*-й строки *B* на третий столбец *C*, начиная с *i*=3:

$$b_{i3} = a_{i3} - (b_{i1}c_{13} + b_{i2}c_{23}), \quad i \geq 3; \qquad (1.4.3)$$

третья строка матрицы *C* получается делением на b_{33} разности между третьей строкой *A* и произведением третьей строки *B* на *j*-й столбец C, начиная с *j*=4:

$$c_{3j} = \frac{1}{b_{33}}(a_{3j} - (b_{31}c_{1j} + b_{32}c_{2j})), \quad j \geq 4. \qquad (1.5.3)$$

Четвертый столбец матрицы *B* равен разности четвертого столбца *A* и четвертой строки *B*, умноженной на четвертый столбец матрицы *C*:

$$b_{44} = a_{44} - (b_{41}c_{14} + b_{42}c_{22} + b_{43}c_{34}). \qquad (1.4.4)$$

Заметим, что *A* и *C* могут быть прямоугольными матрицами размерности $4 \times (n+k)$. Тогда четвертая строка матрицы *C* получается путем деления на b_{44} разности *j*-го столбца *A* и четвертой строки *B*, умноженной на *j*-й столбец *C*, начиная с *j*=5:

$$c_{4j} = \frac{1}{b_{44}}(a_{4j} - (b_{41}c_{1j} + b_{42}c_{2j} + b_{43}c_{3j})), \quad j > 4. \qquad (1.5.4)$$

Тогда решения треугольных систем вида (1.6) определяются по формулам, подобным (1.7), (1.8).

Для рассмотренной задачи треугольные системы $By = b,\ \ Cx = y$ и их решения определяются формулами:

$$\begin{cases} b_{11}y_1 = b_1, \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 = b_2, \\ b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3 = b_3, \\ b_{41}y_1 + b_{42}y_2 + b_{43}y_3 + b_{44}y_4 = b_4, \end{cases} \begin{cases} y_1 = \dfrac{b_1}{b_{11}} = \dfrac{a_{15}}{b_{11}}, \\ y_2 = \dfrac{1}{b_{22}}(b_2 - b_{21}y_1), \\ y_3 = \dfrac{1}{b_{33}}(b_3 - (b_{31}y_1 + b_{32}y_2)), \\ y_4 = \dfrac{1}{b_{44}}(b_4 - (b_{41}y_1 + b_{42}y_2 + b_{43}y_3)). \end{cases} \qquad (1.7^*)$$

$$b_i = a_{i,5}, \quad y_i = c_{i,5}.$$

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4 = y_1, \\ x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 = y_2, \\ x_3 + c_{34}x_4 = y_3, \\ x_4 = y_4. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_4 = y_4, \\ x_3 = y_3 - c_{34}x_4, \\ x_2 = y_2 - (c_{23}x_3 + c_{24}x_4), \\ x_1 = y_1 - (c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4). \end{cases} \qquad (1.8^*)$$

Формулы (1.7*), (1.8*) представляют собой расшифровку формул (1.7) и (1.8). Вычисления по схеме Халецкого для удобства располагают в таблице, в которой предусмотрен столбец контрольных сумм для проверки правильности вычислений. Над элементами в этом столбце производятся те же преобразования, что и над остальными элементами в соответствующей строке (Таблица 1).

Таблица 1. Схема решения системы методом Халецкого

№ этапа	Коэффициенты при неизвестных				Свободные члены: I - b II - y III - x	$\sum$
	x_1	x_2	x_3	x_4		
I	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	$a_{15} = b_1$	a_{16}
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	$a_{25} = b_2$	a_{26}
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	$a_{35} = b_3$	a_{36}
	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	$a_{45} = b_4$	a_{46}
II	b_{11} | 1	c_{12}	c_{13}	c_{14}	$c_{15} = y_1$	c_{16}
	b_{21}	b_{22} | 1	c_{23}	c_{24}	$c_{25} = y_2$	c_{26}
	b_{31}	b_{32}	b_{33} | 1	c_{34}	$c_{35} = y_3$	c_{35}
	b_{41}	b_{42}	b_{43}	b_{44} | 1	$c_{45} = y_4$	c_{46}
III	1				x_1	$\sum_1 = 1 + x_1$
		1			x_2	$\sum_2 = 1 + x_2$
			1		x_3	$\sum_3 = 1 + x_3$
				1	$x_4 = y_4$	$\sum_4 = 1 + x_4$

Пример. Методом Халецкого решить систему

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -12, \\ 2x_1 + x3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение системы оформляем в таблице 2.

Этап I. Первый раздел таблицы 2 содержит расширенную матрицу системы (матрицу коэффициентов системы со столбцом свободных членов) и столбец контрольных сумм. Последний столбец позволяет контролировать правильность вычислений на каждом шаге.

Этап II. Учитывая равенства $b_{i1} = a_{i1} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$ замечаем, что первый столбец *B* (раздел II) совпадает с первым столбцом *A* (раздел I).

Для получения первой строки *C*, делим все элементы первой строки раздела I на элемент $a_{11} = b_{11} = 3$:

$$c_{12} = \frac{1}{3}, \quad c_{13} = -\frac{1}{3}, \quad c_{14} = \frac{2}{3}, \quad y_1 = c_{15} = \frac{6}{3}, \quad c_{16} = \frac{11}{3}, \quad (\sum_{j=1}^{5} c_{1j} = c_{16}).$$

Второй столбец *B* равен разности второго столбца *A* и первого столбца *B*, умноженного на c_{12}, начиная с *i*=2:

$$\begin{cases} b_{22} = a_{22} - b_{21}c_{12} = 1 - (-5 \cdot \frac{1}{3}) = \frac{8}{3}, \\ b_{32} = a_{32} - b_{31}c_{12} = 0 - (2 \cdot \frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}, \\ b_{42} = a_{41} - b_{41}c_{12} = (-5) - (1 \cdot \frac{1}{3}) = -\frac{16}{3}. \end{cases}$$

Вторая строка матрицы C равна разности второй строки A и первой строки C, умноженной на b_{12}, и все это деленное на b_{22}, начиная с третьего элемента:

$$\begin{cases} c_{23} = \dfrac{1}{b_{22}}(a_{23} - b_{21}c_{13}) = \dfrac{3}{8}\cdot(3-(-5)\cdot(-\dfrac{1}{3})) = \dfrac{1}{2}, \\ c_{24} = \dfrac{1}{b_{22}}(a_{24} - b_{21}c_{14}) = \dfrac{3}{8}\cdot(-4-(-5)\cdot\dfrac{2}{3}) = -\dfrac{1}{4}, \qquad \textit{Контроль}: 1+\sum_{j=3}^{5} c_{2j} = c_{26}. \\ y_2 = c_{25} = \dfrac{1}{b_{22}}(a_{25} - b_{21}c_{15}) = \dfrac{3}{8}\cdot(-12-(-5)\cdot 2) = -\dfrac{3}{4}, \\ c_{26} = \dfrac{1}{b_{22}}(a_{26} - b_{21}c_{16}) = \dfrac{3}{8}\cdot(-17-(-5)\cdot\dfrac{11}{3}) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Третий столбец матрицы B получается вычитанием из третьего столбца A произведения третьей строки B и третьего столбца C, начиная с $i = 3$:

$$\begin{cases} b_{33} = a_{33} - b_{31}c_{13} - b_{32}c_{23} = 1 - 2\cdot(-\dfrac{1}{3}) - (-\dfrac{2}{3})\cdot\dfrac{1}{2} = 2, \\ b_{43} = a_{43} - b_{41}c_{13} - b_{42}c_{23} = 3 - 1\cdot(-\dfrac{1}{3}) - (-\dfrac{16}{3})\cdot\dfrac{1}{2} = 6, \end{cases}$$

Третью строку матрицы C получаем делением на b_{33} разности между третьей строкой A и произведением третьей строки B на j-й столбец C, начиная с $j = 4$:

$$\begin{cases} c_{34} = \dfrac{1}{b_{33}}(a_{34} - (b_{31}c_{14} + b_{32}c_{24})) = \dfrac{1}{2}\cdot(-1-2\cdot\dfrac{2}{3} - (-\dfrac{2}{3})\cdot(-\dfrac{1}{4})) = -\dfrac{5}{4}, \\ c_{35} = \dfrac{1}{b_{33}}(a_{35} - (b_{31}c_{15} + b_{32}c_{25})) = \dfrac{1}{2}\cdot(1-2\cdot 2 - (-\dfrac{2}{3})\cdot(-\dfrac{3}{4})) = -\dfrac{7}{4}, \\ c_{36} = \dfrac{1}{b_{33}}(a_{36} - (b_{31}c_{16} + b_{32}c_{26})) = \dfrac{1}{2}\cdot(3-2\cdot\dfrac{11}{3} - (-\dfrac{2}{3})\cdot\dfrac{1}{2}) = -2. \end{cases}$$

$\textit{Контроль}: \quad 1+\sum_{j=4}^{5} c_{3j} = c_{36}.$

Четвёртый столбец матрицы B равен четвертому столбцу A минус четвертая строка B, умноженная на четвертый столбец матрицы C:

$$b_{44} = a_{44} - b_{41}c_{14} - b_{42}c_{22} - b_{43}c_{34} = (-3) - 1\cdot\frac{2}{3} - (-\frac{16}{3})\cdot(-\frac{1}{4}) - 6\cdot(-\frac{5}{4}) = \frac{5}{2}.$$

Четвертая строка матрицы C, получается путем деления на b_{44} разности четвертой строки A и четвертой строки B, умноженной на j-й столбец C, начиная с $j = 5$:

$$\begin{cases} y_4 = c_{45} = \dfrac{1}{b_{44}}(a_{45} - b_{41}c_{15} - b_{42}c_{25} - b_{43}c_{35}) = \dfrac{2}{5}\cdot(3-1\cdot 2 - (-\dfrac{16}{3})\cdot(-\dfrac{3}{4}) - 6\cdot(-\dfrac{7}{4})) = 3, \\ c_{46} = \dfrac{1}{b_{44}}(a_{46} - b_{41}c_{16} - b_{42}c_{26} - b_{43}c_{36}) = \dfrac{2}{5}\cdot(-1-1\cdot\dfrac{11}{3} - (-\dfrac{16}{3})\cdot\dfrac{1}{2} - 6\cdot(-2)) = 4. \end{cases}$$

$\textit{Контроль}: \quad 1 + c_{45} = c_{46}.$

По формулам (1.7) в пятом столбце таблицы 2 получается решение системы $Cx = y$.

Этап III. Решение и контрольные суммы по формулам (1.8):

$x_4 = y_4 = 3, \quad \sum_4 = c_{46} = 4 \quad \sum_4 = 1 + x_4.$

$x_3 = y_3 - c_{34}x_4 = -\frac{7}{4} - (-\frac{5}{4}) \cdot 3 = 2,$

$\sum_3 = c_{36} - c_{34}c_{46} = -2 - (-\frac{5}{4}) \cdot 4 = 3, \quad \sum_3 = 1 + x_3.$

$x_3 = y_2 - c_{23}x_3 - c_{24}x_4 = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot 2 - (-\frac{1}{4}) \cdot 3 = -1,$

$\sum_2 = c_{26} - c_{23}\sum_3 - c_{24}\sum_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 3 - (-\frac{1}{4}) \cdot 4 = 0, \quad \sum_2 = 1 + x_2.$

$x_1 = y_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x_3 - c_{14}x_4 = 2 - \frac{1}{3} \cdot (-1) - (-\frac{1}{3}) \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 1,$

$\sum_1 = c_{16} - c_{12}\sum_2 - c_{13}\sum_3 - c_{14}\sum_4 = \frac{11}{3} - \frac{1}{3} \cdot 0 - (-\frac{1}{3}) \cdot 3 - \frac{2}{3} \cdot 4 = 2, \quad \sum_1 = 1 + x_1.$

Решение данной системы представлено в таблице 2.

Таблица 2. Решение системы методом Халецкого

№ этапа	Коэффициенты при неизвестных				Свободные члены: I - b II - y III - x	$\sum$
	x_1	x_2	x_3	x_4		
I	3	1	-1	2	6	11
	-5	1	3	-4	-12	-17
	2	0	1	-1	1	3
	1	-5	3	-3	3	-1
II	3 1	1/3	-1/3	2/3	2=y_1	11/3
	-5	8/3 1	1/2	-1/4	-3/4= y_2	1/2
	2	-2/3	2 1	-5/4	-7/4= y_3	-2
	1	-16/3	6	5/2 1	3=y_4	4
III	1				$x_1 = 1$	$\sum_1$ =2
		1			$x_2 = -1$	$\sum_1$ =0
			1		x_3 =2	$\sum_1$ =3
				1	$x_4 = 3$	$\sum_1$ =4

Ответ: $x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3.$

Программа реализации метода Халецкого на языке Java

Язык Java разработан компанией Sun Microsystems. Это специальный объектно-ориентированный язык программирования общего назначения. Java считается лучшим выбором для работы программы с большим количеством данных в плане скорости выполнения операций. Этот язык часто применяется в научных разработках программ.

Для создания пользовательского интерфейса были использованы встроенные Java-библиотеки: AWT – содержит компоненты пользовательского интерфейса (кнопки, текстовые поля, метки-надписи) и методы для их правильной работы; также использовались библиотеки KeyEvent и KeyAdapter – слушатели клавиатуры и мыши, чтобы интерфейс работал с изменяемыми пользователем данными.

Для составления программы реализации метода Халецкого использовались формулы п.1. В программе фигурируют два массива элементов вещественного типа: массив матрицы коэффициентов системы и массив полученных коэффициентов. В дальнейшем планируется модифицировать программу реализации метода Халецкого для решения системы с большим количеством уравнений и неизвестных.

Сама программа может быть легко перенесена на другие высокоуровневые языки программирования, с учётом синтаксиса этих языков (Python, C++ и т.д.). С целью проверки эффективности работы программы был проведен анализ времени решения системы четырех уравнений по программе, реализующей метод Халецкого, в сравнении с популярными методами Гаусса и матричным. При этом использовались известные в программировании стандартные реализации указанных методов, откорректированные для линейной системы рассмотренной размерности. С помощью встроенных системных функций System.nanoTime() было измерено время работы этих программ. Для реализации метода на языке Java была разработана программа-листинг, которая представлена на рис. 1 и рис. 2.

```
1   package khaletsky;
2   public class Khaletsky {
3       public static void main(String[] args) {
4           float x4, x3, x2, x1;
5           float[][] massA;
6           massA = new float[4][5];
7           float[][] mass;
8           mass = new float[4][6];
9   
10              for (int i = 0; i < 4; i++) {
11                  for (int j = 0; j < 5; j++) {
12                      massA[0][0] = 3; massA[0][1] = 1; massA[0][2] = -1; massA[0][3] = 2; massA[0][4] = 6;
13                      massA[1][0] = -5; massA[1][1] = 1; massA[1][2] = 3;  massA[1][3] = -4;massA[1][4] = -12;
14                      massA[2][0] = 2; massA[2][1] = 0;massA[2][2] = 1;  massA[2][3] = -1;massA[2][4] = 1;
15                      massA[3][0] = 1; massA[3][1] = -5; massA[3][2] = 3; massA[3][3] = -3;massA[3][4] = 3;
16                  }
17              }
18          System.out.println("Матрица коэффициентов системы:");
19          for (int i = 0; i < 4; i++) {
20              for (int j = 0; j < 5; j++) {
21                  System.out.print(massA[i][j] + "\t");
22              }
23              System.out.println();
24          }
25          for (int i = 0; i < 4;) {
26              for (int j = 0; j < 6; j++) {
27                  if (i != 4) {
28                      mass[i][0] = massA[i][0];
29                      i++;
30                      mass[i][0] = massA[i][0];
31                      i++;
32                      mass[i][0] = massA[i][0];
33                      i++;
34                      mass[i][0] = massA[i][0];
35                      i++;
36                  }
37              }
38          }
```

Рис. 1. Листинг программы для реализации метода Халецкого (начало)

Описание программы

1, 2 и 3 строчки кода – объявление пакета, класса и главного метода программы. В 4 строке происходит объявление переменных x_1, x_2, x_3, x_4; это переменные вещественного типа. На 5 строке листинга находится объявление массива massA, элементами этого массива будут являются коэффициенты уравнений системы. На 6 строке происходит инициализация массива, т.е. в первых квадратных скобках указывается число строк данного массива, а во вторых скобках – число столбцов. В строках 7 и 8 происходят аналогичные создания и инициализация массива mass вещественных элементов как в строках 5 и 6, только количество столбцов на один больше, чем у массива massA. Массив mass – это раздел II таблицы 1, без последнего столбца. В строках 10-17 происходит инициализация элементов массива massA с использованием оператора циклов for для нумерации строк и столбцов массива. Возьмём для проверки матрицу из примера, рассмотренного выше, заметим, что нумерация строк и столбцов в Java начинается с нуля. В строках 19-24 происходит печать полученной матрицы в консоль. В строках 25-38 происходит инициализация нулевого столбца массива mass с использованием значения нулевого столбца массива massA, после инициализации элемента происходит переключение строки на строках листинга: 29, 31, 33, 35. Также со строки 27 должно выполняться условие, что указатель строки не равен 4, иначе программа выйдет за границы массива и выдаст ошибку.

В строках 39-59 происходит инициализации оставшихся элементов массива mass. В строке 42 используется формула (1.5.1) для полной инициализации нулевой строки массива. В строке 45 используется формула (1.4.2) для полной инициализации столбца 1. В строке листинга 48 используется формула (1.5.2) для заполнения первой строки массива. Строка 51 листинг позволяет заполнить третий столбец массива в соответствии с формулой (1.4.3). В строке 54 происходит инициализация второй строки в соответствии с формулой (1.5.3). В строках 56, 57 используются формулы (1.4.4) и (1.5.4) соответственно для инициализации оставшихся элементов массива. В строках 61-67 происходит печать массива mass в консоль программы.

В строках 69-72 происходит вычисление решения системы с использованием таблицы 1 и формул (1.8*). В строках 73-77 происходит печать решения системы в консоль программы.

```
39            for (int i = 0; i < 4; i++) {
40                for (int j = 0; j < 6; j++) {
41                    if (i == 0 && j > 1) {
42                        mass[i][j] = massA[i][j - 1] / mass[i][i];
43                    }
44                    if (j == 1 && i > 0) {
45                        mass[i][j] = massA[i][j] - mass[i][j - 1] * mass[0][2];
46                    }
47                    if (i == 1 && j > 2) {
48                        mass[i][j] = (1 / mass[1][1]) * (massA[1][j - 1] - mass[1][0] * mass[0][j]);
49                    }
50                    if (j == 2 && i > 1) {
51                        mass[i][j] = massA[i][j] - (mass[i][0] * mass[0][3] + mass[i][1] * mass[1][3]);
52                    }
53                    if (i == 2 && j > 3) {
54                        mass[i][j] = 1 / mass[2][2] * (massA[2][j - 1] - (mass[2][0] * mass[0][j] + mass[2][1] * mass[1][j]));
55                    }
56                    mass[3][3] = massA[3][3] - (mass[3][0] * mass[0][4] + mass[3][1] * mass[1][4] + mass[3][2] * mass[2][4]);
57                    mass[3][5] = (1 / mass[3][3]) * (massA[3][4] - (mass[3][0] * mass[0][5] + mass[3][1] * mass[1][5] + mass[3][2] * mass[2][5]));
58                }
59            }
60             System.out.println();
61            System.out.println("Матрица для решения методом Халецкого:");
62            for (int i = 0; i < 4; i++) {
63                for (int j = 0; j < 6; j++) {
64                    System.out.printf("%.2f\t", mass[i][j]);
65                }
66                System.out.println();
67            }
68            System.out.println();
69                        x4 = mass[3][5];
70                        x3 = mass[2][5] - mass[2][4] * x4;
71                        x2 = mass[1][5] - (mass[1][3] * x3 + mass[1][4] * x4);
72                        x1 = mass[0][5] - (mass[0][2] * x2 + mass[0][3] * x3 + mass[0][4] * x4);
73                        System.out.println("\nРешение системы:");
74                        System.out.printf("x1 = %.4f\n", x1);
75                        System.out.printf("x2 = %.4f\n", x2);
76                        System.out.printf("x3 = %.4f\n", x3);
77                        System.out.printf("x4 = %.4f\n", x4);
78        }
79    }
```

Рис. 2. Листинг программы для реализации метода Халецкого (окончание)

Проверим работу программы. Результаты работы программы представлены на рис. 3. Как мы видим, ответ полностью совпадает с ответом из примера, рассмотренного выше.

```
debug:
Матрица коэффициентов системы:
3.0     1.0     -1.0    2.0     6.0
-5.0    1.0     3.0     -4.0    -12.0
2.0     0.0     1.0     -1.0    1.0
1.0     -5.0    3.0     -3.0    3.0

Матрица для решения метод Халецкого:
3,00    0,00    0,33    -0,33   0,67    2,00
-5,00   2,67    0,00    0,50    -0,25   -0,75
2,00    -0,67   2,00    0,00    -1,25   -1,75
1,00    -5,33   6,00    2,50    0,00    3,00

Решения системы:
x1 = 1,000
x2 = -1,000
x3 = 2,000
x4 = 3,000
СБОРКА УСПЕШНО ЗАВЕРШЕНА (общее время: 4 секунды)
```

Рис. 3. Результаты работы программы

Был спроектирован интерфейс для удобной работы с программой. На рис. 4 показано главное окно интерфейса, в текстовые поля введены коэффициенты из рассмотренного примера. После введения коэффициентов нужно нажать на кнопку «Рассчитать».

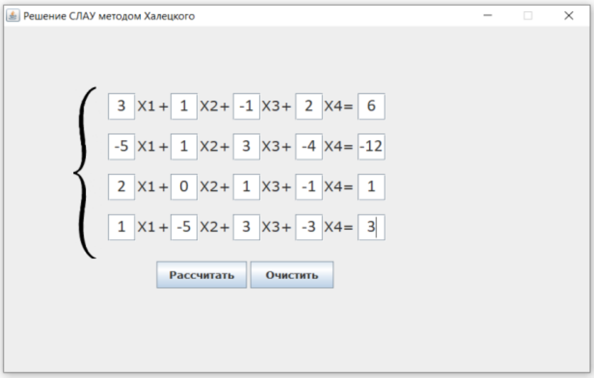

Рис. 4. Главное окно интерфейса

После нажатия появляется окно вывода, предоставленное на рис. 5, в котором содержится: матрица коэффициентов системы, матрица для решения методом Халецкого, формулы для получения значений элементов этой матрицы и решение данной системы уравнений. После нажатия на кнопку «Ок», окно закрывается и можно вводить другие коэффициенты системы.

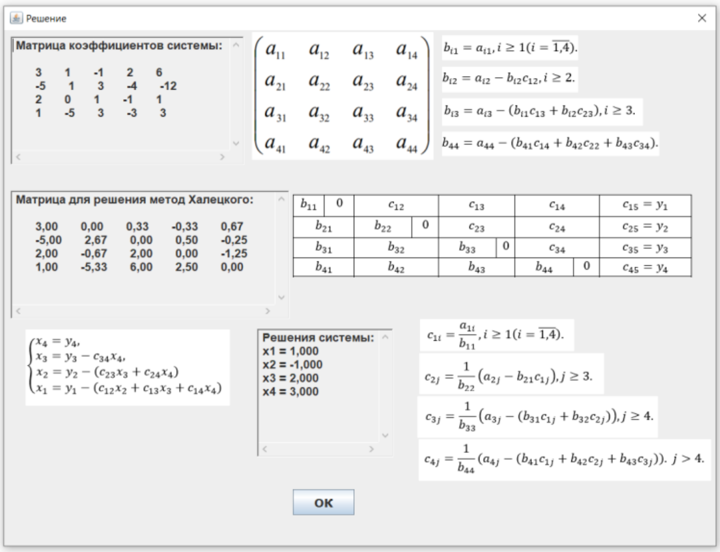

Рис. 5. Окно с решением системы

Программная реализация метода Халецкого проверена на нескольких системах. Приведем один из примеров. Для следующей системы

$$\begin{cases} 0,63x_1 + 1,00x_2 + 0,71x_3 + 0,34x_4 = 2,08, \\ 1,17x_1 + 0,18x_2 - 0,65x_3 + 0,71x_4 = 0,17, \\ 2,71x_1 - 0,75x_2 + 1,17x_3 - 2,35x_4 = 1,28, \\ 3,58x_1 + 0,21x_2 - 3,45x_3 - 1,18x_4 = 0,05, \end{cases}$$

решение найдено ручным способом. На рис. 6 приведено решение этой системы разными методами: Халецкого, Гаусса и матричным с указанием времени работы соответствующих программных реализаций.

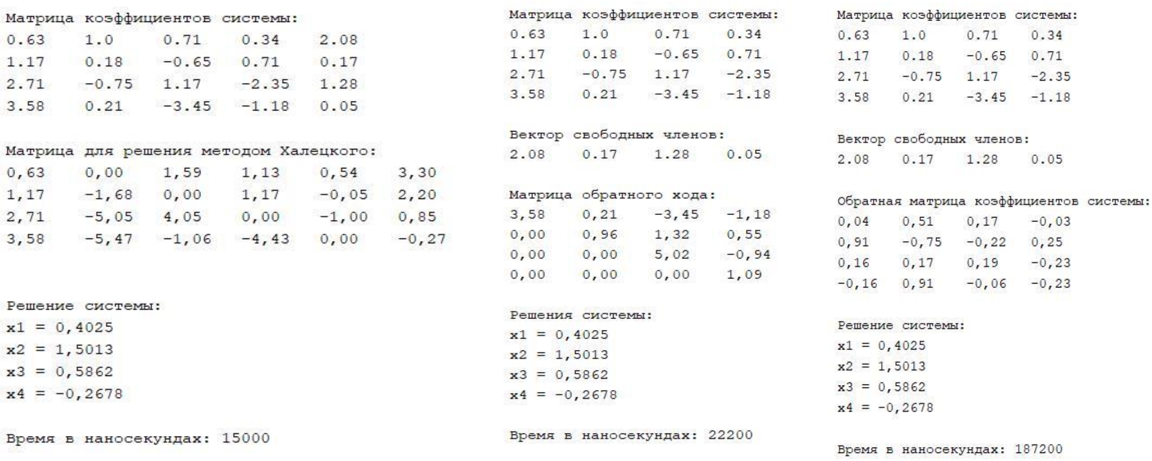

Рис. 6. Сравнительный анализ времени решения системы методами Халецкого, Гаусса, матричным

Получились следующие результаты: метод Халецкого – 15000 наносекунд, метод Гаусса – 22200 наносекунд, матричный метод – 187200 наносекунд. Как видно, метод Халецкого оказался быстрее двух других практически в 1,5 и 12 раз соответственно.

Заключение

Основные выводы данной статьи:

– достаточно полно описана схема Халецкого решения линейных алгебраических систем;

– представлена реализация метода Халецкого на языке программирования Java в среде разработки NeatBeans;

– описан код и структура программы реализации метода Халецкого;

– спроектирован интерфейс для работы с программой;

– установлено, что метод Халецкого более быстрый по сравнению с популярными методами Гаусса и матричным.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 660 с

2. Пержабинский С. М. Решение систем линейных уравнений с симметричными положительно определенными матрицами итерационными методами: статья в сборнике статей: Институт систем энергетики им Л.А. Мелентьева, 2005. 210-214 с.

3. Пержабинский С. М., Филатов А. Ю. Решение систем линейных уравнений с симметричными положительно определенными матрицами методом сопряженных направлений: статья в сборнике трудовых конференций. Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева, 2005. 135-139 с.

4. Толстых О. Д., Миндеева С. В. Специальные разделы высшей математики: учебное пособие. Иркутск: ИрГУПС, 2016. 156 с.

5. Толстых О. Д., Миндеева С. В. Специальные разделы высшей математики: практикум. Иркутск: ИрГУПС, 2016. 72 с.

6.Толстых О. Д., Черниговская Т. Н. Основы линейной алгебры с приложениями в других разделах математики: учебное пособие. Иркутск: ИрГУПС, 2017. 148 с.

7. Фролов А. В., Воеводин В. В., Коньшин И. Н., Теплов А. М. Исследование структурных свойств алгоритма разложения Холецкого: от давно известных фактов до новых выводов. Институт вычислительной математики РАН, Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ, Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН. 2015. 149-162 с.

REFERENCES

1. Demidovich B. P., Maron I. A. Fundamentals of computational Mathematics: State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1963. 660 p.

2. Perzhabinsky S. M. Solution of systems of linear equations with symmetric positive definite matrices by iterative methods: article in the collection of articles: Institute of Energy Systems named after L. A. Melentyev, 2005. 210-214 p.

3. Perzhabinsky S. M., Filatov A. Yu. Solution of systems of linear equations with symmetric positive definite matrices by the method of conjugate directions: article in the collection of labor conferences. L. A. Melentyev Institute of Energy Systems, 2005, 135-139 p.

4. Tolstykh O. D., Mindeeva S. V. Special sections of higher mathematics: a textbook. Irkutsk: IrGUPS, 2016. 156 p.

5. Tolstykh O. D., Mindeeva S. V. Special sections of higher mathematics: practicum. Irkutsk: IrGUPS, 2016. 72 p.

6. Tolstykh O. D., Chernihiv T. N. Fundamentals of linear algebra with applications in other sections of mathematics: a textbook. Irkutsk: IrGUPS, 2017. 148 p.

7. Frolov A.V., Voevodin V. V., Konshin I. N., Teplov A.M. Investigation of the structural properties of the Cholesky decomposition algorithm: from long-known facts to new conclusions. Institute of Computational Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow State University Research Computing Center, A. A. Dorodnitsyn Computing Center of the Russian Academy of Sciences. 2015. 149-162 p.

Информация об авторах

Кононов Евгений Александрович – студент 1 курса специальности «Строительство железных дорог», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: zhenya.kononov.11@mail.ru

Нифедов Максим Александрович – студент 2 курса направления подготовки «Программная инженерия», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: ziggy.zen@yandex.ru

Толстых Ольга Дмитриевна – к. ф.-м. н., доцент кафедры «Математика», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: tolgad05@mail.ru

Authors

Evgeny Aleksandrovich Kononov – 1st year student of the specialty «Construction of Railways», Irkutsk State University of Railway Transport, Irkutsk, e-mail: zhenya.kononov.11@mail.ru

Maxim Aleksandrovich Nifedov – 2nd year student of «Software Engineering», Irkutsk State University of Railway Engineering, Irkutsk, e-mail: ziggy.zen@yandex.ru

Olga Dmitrievna Tolstykh – Ph. D., Associate Professor of the Department of «Mathematics», Irkutsk State University of Railway Transport, Irkutsk, e-mail: tolgad05@mail.ru

Для цитирования

Кононов Е.А. Метод Халецкого и его реализация на языке программирования Java в среде разработки NeatBeans [Электронный ресурс] / Е. А. Кононов, М. А. Нифедов, О. Д. Толстых // Молодая наука Сибири: электрон. науч. журн. — 2021. — №12. — Режим доступа: http://mnv.irgups.ru/toma/121-2021, свободный. — Загл. с экрана. — Яз. рус., англ. (дата обращения: 07.06.2021)

For citation

Kononov E.A., Nifedov M.A., Tolstykh O.D. The Haletsky method and its implementation in the Java programming language in the NeatBeans development environment. *Molodaya nauka Sibiri: ehlektronnyj nauchnyj zhurnal* [Young science of Siberia: electronic scientific journal], 2021, no. 12. [Accessed 07/06/21]