

С. В. Серышев¹, Е. А. Труфанов¹, Е. В. Таирова¹

¹Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Российская Федерация

ОБ ОДНОЙ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Аннотация. В данной статье рассматривается закономерность, которая была выявлена между следующими друг за другом квадратами чисел, взятых с шагом в единицу. Приведены: теоретическое обоснование, представление квадрата действительного числа в виде суммы ряда арифметической прогрессии, численные эксперименты, в том числе в среде программирования Pascal. Сделаны выводы.

Ключевые слова: квадраты чисел, закономерность между квадратами чисел.

S. V. Seryshev¹, E. A. Trufanov¹, E. V. Tairova¹

¹Irkutsk State University of Railway, Irkutsk, Russian Federation

ON ONE REGULARITY OF NUMBER THEORY

Abstract. In this article, the pattern is considered that has been found between successive squares of number taken one step at a time. Theoretical justification, presentation of the square of the real number as the sum of the series of arithmetic progressions, numerical experiments, including in the Pascal programming environment are provided. The conclusion were made.

Keywords: squares of number, pattern between squares of number.

Введение

Еще в Древней Греции философы полагали, что “все есть число”. Они занимались изучением самого числа, именно тогда и появились первые теоремы, первые постановки задач теории чисел, которая в последствие стала разделом математики. Эта наука изучает действия над целыми и дробными числами, различные правила обращения с ними, учит решать задачи, сводящиеся к сложению, вычитанию, умножению и делению чисел. Не случайно теорию чисел называли высшей арифметикой. Арифметика учит правильно и экономно мыслить, рассуждать, быть точным и проверять свои действия.

По мере развития теории чисел оказалось, что в мире есть любопытные закономерности, которые могут быть описаны с помощью математики, например, последовательность или числа Фибоначчи и др. [1] Известны различные представления квадратов натуральных чисел.

В статье исследуются приращения квадратов положительных действительных чисел, отличающихся друг от друга на единицу. Рассматривается представление квадрата произвольного действительного числа в виде суммы ряда арифметической прогрессии. Приводятся геометрическая интерпретация выявленной закономерности и результаты численного эксперимента в среде программирования Pascal.

Теоретический анализ и геометрическая интерпретация

Возьмем любое действительное число $x \geq 0$. Составим следующие разности квадратов

$$\Delta_1 = (x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1 \quad (1)$$

$$\Delta_2 = (x + 2)^2 - (x + 1)^2 = 2x + 3 \quad (2)$$

Найдем

$$\Delta_2 - \Delta_1 = 2x + 3 - 2x - 1 = 2. \quad (3)$$

Полученное значение показывает, что приращение разностей квадратов действительных чисел, отличающихся друг от друга на единицу, равно 2 и не зависит от конкретного значения x .

Дадим геометрическую интерпретацию данного вывода.

Рассмотрим функцию $y = x^2$, график которой представляет собой параболу.

С помощью функции График в программе Microsoft Visio в таблицу для построения графика (рис. 1) были внесены действительные числа: 1,3; 2,3; 3,3; 4,3; 5,3 и их квадраты соответственно: 1,69; 5,29; 10,89; 18,49 и 28,09. Далее вычислим значения разности между квадратами следующих друг за другом чисел:

$$\Delta_1 = 10,89 - 5,29 = 5,6$$

$$\Delta_2 = 18,49 - 10,89 = 7,6$$

Получим разность приращений:

$$\Delta_2 - \Delta_1 = 7,6 - 5,6 = 2$$

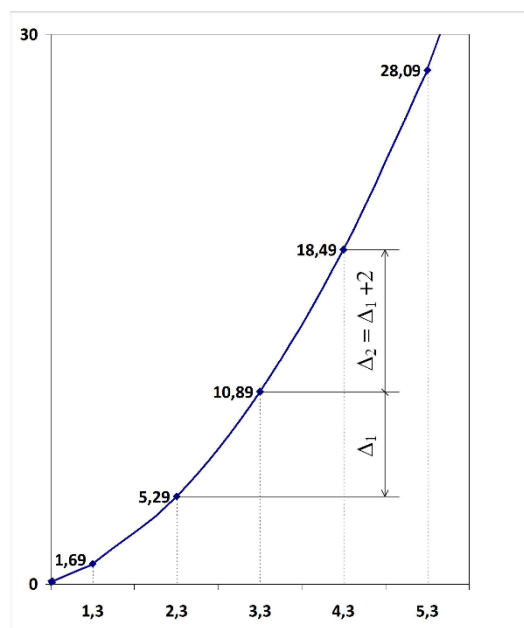


Рис.1. Приращения квадратов чисел выбранной последовательности

Если не выделять конкретных значений переменной x , тогда общий вид графика будет представлен следующим образом (рис. 2):

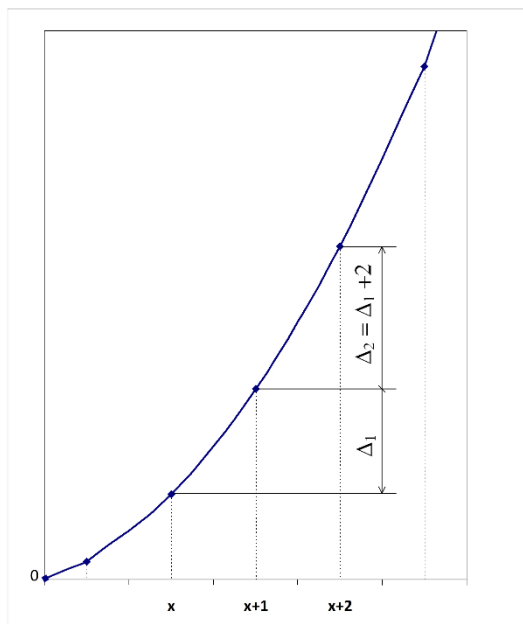


Рис.2. Приращения квадратов произвольных действительных чисел, отличающихся на единицу

Представление квадрата действительного числа в виде суммы ряда арифметической прогрессии

Выберем действительное число, например, $x = 6.25$. Обозначим $y = x^2 = 6.25^2$.

Выделим целую и дробную часть числа x , $x = x_0 + 6 = 0.25 + 6$.

Составим последовательность x_i , $i = 0, 1, \dots, 6$

$$x_0 = 0.25; x_1 = 1.25; x_2 = 2.25; x_3 = 3.25; x_4 = 4.25; x_5 = 5.25; x_6 = 6.25.$$

Найдем $y_0 = x_0^2$; $y_0 = 0.25^2 = 0.0625$. Этому значению соответствует прямая на графике, параллельная оси OX (см. рис.3).

Вычислим Δ_1 по формуле (1)

$$\Delta_1 = 2x_0 + 1 = 2 \cdot 0.25 + 1 = 1.5.$$

Согласно формуле (3)

$$\Delta_2 = \Delta_1 + 2 = 1.5 + 2 = 3.5.$$

Продолжая процесс, получим последовательность чисел, составляющую арифметическую прогрессию

$$\Delta_k = \Delta_1 + 2(k - 1), \quad k = 2, 3, \dots, 5.$$

Найдем сумму этой прогрессии

$$S = \sum_{k=1}^6 \Delta_k = \frac{\Delta_1 + \Delta_6}{2} \cdot 6 = \frac{1.5 + 11.5}{2} \cdot 6 = 39$$

И вычислим $y = 6.25^2 = y_0 + S = 0.0625 + 39 = 39.0625$. (4)

На рис. 3 приведена геометрическая иллюстрация выявленной закономерности (4).

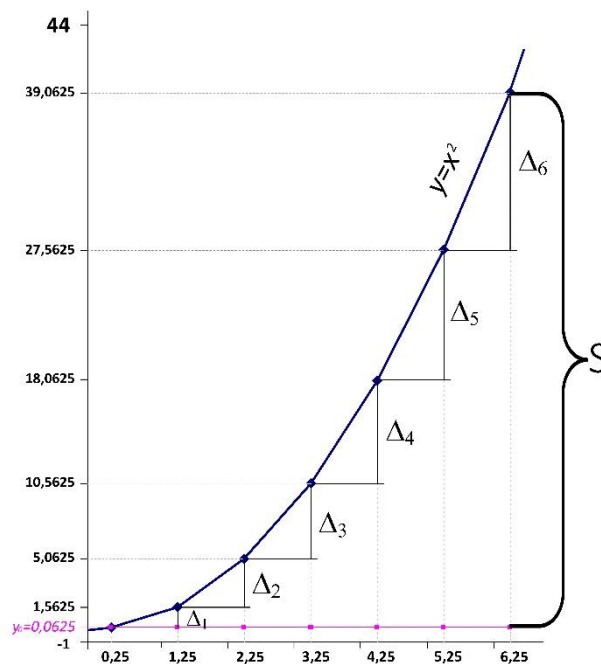


Рис. 3. Геометрическая иллюстрация уравнения (4)

Этот прием численно реализован в среде программирования Pascal.

Программа создана для нахождения квадрата заданного действительного числа в виде суммы ряда арифметической прогрессии, а также обладает оператором проверки, который в случае отклонения результата заранее возведённого заданного числа в квадрат от выведенного программой числа предупредит об этом.

Программа содержит следующие параметры:

- x – параметр, которому присваивается заданное действительное число. Тип – вещественный;
- $x1$ – параметр, которому с помощью функции `trunc` присваивается целая часть заданного действительного числа. Тип - целочисленный;
- $x2$ – параметр, которому с помощью функции `frac` присваивается дробная часть заданного действительного числа. Тип – вещественный;
- $y0$ – параметр, которому присваивается с помощью функции `sq` квадрат дробной части заданного действительного числа. Тип – вещественный [5];
- $d1$ – параметр, которому в ходе работы программы присвоится значение первого приращения;
- d – параметр, который используется для вывода приращений после первого, и в конце используется последнее его значение (последнее приращение);
- i – итератор – параметр, который отсчитывает итерацию в цикле `for`. Тип целочисленный [3];
- s – параметр, которому присваивается сумма прогрессии; Тип - вещественный
- y – параметр, которому присваивается значения квадрата заданного действительного числа. Тип – вещественный.

С самого начала вводится действительное число с помощью оператора `readln`. Затем с помощью функций `trunc` и `frac` его разделяют на целую и дробную часть и присваивают по-

лученные значения к параметрам x_1 и x_2 соответственно. Их выводят на экран с помощью оператора `writeln`. Дробную часть возводят в квадрат при помощи функции `sq` и присваивают полученное значение к параметру y_0 , также выводят на экран оператором `writeln`. Находим первое приращение d_1 по формуле (1) и выводим получившееся значение оператором `writeln`. Далее воспользуемся циклом `for`, итератор которого начнёт отсчёт с 2, т.к. самое первое приращение уже найдено, и закончится на числе равное параметру x_1 (целой части заданного действительного числа). Таким образом будут находиться последующие приращения, значения которых будут присваиваться к параметру d и выводиться на экран при помощи оператора `writeln`. После того, как цикл закончится, будет найдена сумма прогрессии (S) и выведена на экран оператором `writeln`. Далее будет найден сам квадрат действительного заданного числа, присвоен к параметру y . [2, 4]

В конце программы был введён оператор `if` для проверки работы программы. Если найденное значение параметра y отличается от значения x возведённого в квадрат функцией `sq`, то при помощи оператора `writeln` будет выведен текст – Квадраты не равны друг другу => ошибка программы. В случае их совпадения оператором `writeln` будет выведен тест – Нужный квадрат = оператор y (значение найденного программой квадрата заданного действительного числа) [4] (рис. 4).

```

var i, x1: integer;
var x, x2, y0, y, d, d1, s: real;
begin
  write('Введите любое действительное число, квадрат которого вы хотите найти - ');
  readln(x);
  x1:=trunc(x);
  writeln('Целая часть заданного числа = ', x1);
  x2:=frac(x);
  writeln('Дробная часть числа = ', x2);
  y0:=sq(x2);
  writeln('Дробная часть искомого квадрата = ', y0);
  d1:=2*x2+1;
  writeln('d1 = ', d1);
  for i:=2 to x1 do
  begin
    d:=d1+2*(i-1);
    writeln('d', i, ' = ', d);
  end;
  s:=(d1+d)/2*x1;
  writeln('Сумма приращений = ', s);
  y:=y0+S;
  if y=sq(x) then
    writeln('Нужный вам квадрат равен = ', y) else
    writeln('Квадраты не равны друг другу => ошибка');
end.

```

Рис. 4. Текст программы

Для теста программе было задано найти квадрат 6,25.
Результат работы программы (рис. 5).

```

Окно вывода
Введите любое действительное число, квадрат которого вы хотите найти - 6.25
Целая часть заданного числа = 6
Дробная часть числа = 0.25
Дробная часть искомого квадрата = 0.0625
d1 = 1.5
d2 = 3.5
d3 = 5.5
d4 = 7.5
d5 = 9.5
d6 = 11.5
Сумма приращений = 39
Нужный вам квадрат равен = 39.0625

```

Рис. 5. Результат работы программы

Заклучение

Установлено, что разность приращений квадратов действительных положительных чисел, отличающихся на единицу, постоянна и равна 2. Дано теоретическое обоснование этого результата. Получено представление квадрата произвольного действительного числа в виде суммы ряда арифметической прогрессии. Приведены геометрическая иллюстрация полученного результата, вычислительный алгоритм и его реализация в среде программирования Pascal.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шейнерман Эдвард Путеводитель для влюблённых в математику / Шейнерман Э., пер. Огнёв Алексей; М: Альпина нон-фикшн, 2020. – 282 с;
2. Одинцов, И. Профессиональное программирование. Системный подход / И. Одинцов. - СПб.: BHV, 2004. - 624 с.;
3. Редькин, Н. Дискретная математика: Курс лекций для студентов-механиков / Н. Редькин. - СПб.: Лань, 2006. - 96 с.;
4. Уткин, В.Б. Математика и информатика: Учебное пособие / В.Б. Уткин, К.В. Балдин, А.В. Рукосуев. - М.: Дашков и К, 2016. - 468 с.;
5. Ильин, В.А. Основы математического анализа. в 2-х частях Ч.1: Учебник для Вузов / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - М.: Физматлит, 2008. - 648 с.

REFERENCES

1. Scheinerman Edward The Mathematics Lover's Companion: Masterpieces for Everyone / Scheinerman E., tr. Ognev Aleksey; M: Alpine-non-fiction, 2020. – 282 p.;
2. Odintsov, I, Professional Programming. System approach / Odintsov I.; BHV: Lan', 2004. – 624 p.;
3. Red'kin, N. Discrete Mathematics: Course of lectures for mechanical students / Red'kin, N – SPB: Lan', 2006. – 96 p.;
4. Utkin, V.B. Mathematics and Computer Science: Training Manual / V.B. Utkin, K.V. Bal-din, A.V. Rukusiev. - M.: Dashkov and K, 2016. - 468 p.;
5. Ilyin, V.A. Basics of Mathematical Analysis. in parts II.: Textbook for Universities / V.A. Ilyin, E.G. Pozniak. - M.: Fizmatlit, 2008. – 648 p.
- 6.

Информация об авторах

Серышев Сергей Викторович – студент 1-го курса факультета «Управление на транспорте и информационные системы», специальность «Эксплуатация железных дорог», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: skyrex1.0.2@gmail.com.

Труфанов Евгений Александрович – студент 1-го курса факультета «Управление на транспорте и информационные системы», специальность «Эксплуатация железных дорог», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: eatrufanov02@gmail.com.

Тайрова Елена Викторовна – доцент кафедры “Математика” Иркутского государственного университета путей сообщения, кандидат физико-математических наук, доцент по специальности 05.13-18 “Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ”, г.Иркутск, e-mail: tairova_1@mail.ru

Authors

Sergey Victorovich Seryshev– student, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: skyrex1.0.2@gmail.com

Evgeny Aleksandrovich Trufanov - student, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: eatrufanov02@gmail.com

Elena Victorovna Tairova – Associate Professor of the Subdepartment of Mathematics, Irkutsk State Transport University, Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor in the specialty 05.13-18 “Mathematical modeling, numerical methods and program complexes”, Irkutsk, e-mail: tairova_1@mail.ru

Для цитирования

Серышев С.В. Об одной закономерности теории чисел [Электронный ресурс] / С. В. Серышев, Е. А. Труфанов, Е. В. Таирова // Молодая наука Сибири: электрон. науч. журн. — 2021. — №12. — Режим доступа: <http://mnv.ircgups.ru/toma/121-2021>, свободный. — Загл. с экрана. — Яз. рус., англ. (дата обращения: 07.06.2021)

For citation

Seryshev S. V., Trufanov E. A., Tairova E. V. On one regularity of number theory. *Molodaya nauka Sibiri: ehlektronnyj nauchnyj zhurnal* [Young science of Siberia: electronic scientific journal], 2021, no. 12. [Accessed 07/06/21]