

Рязанцев А.И.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Иркутский государственный университет путей сообщения

## ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС РЕШЕНИЯ ДВУХКРИТЕРИАЛЬНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

**Аннотация.** В статье приведено описание программного комплекса решения двухкритериальной транспортной задачи линейного программирования. Программный комплекс разработан для автоматизации процесса решения транспортных задач с двумя целевыми функциями. К его основным возможностям относятся: нахождение множества Парето, выделение единственного решения, построение графических результатов.

**Ключевые слова:** многокритериальное линейное программирование, транспортная задача, векторная оптимизация, программный комплекс.

Ryazantsev A.I.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Irkutsk State Transport University

## PROGRAM COMPLEX OF SOLVING TWO CRITERIA TRANSPORT PROBLEM

**Abstract.** This article describes the software complex for solving two-criteria linear programming transport problem. The program complex is developed to automate the process of solving transport problems with two objective functions. It's main features include: finding the Pareto set, highlighting a single solution, building graphical results.

**Keywords:** multi-criteria linear programming, transport problem, vector optimization, software complex.

### Постановка двухкритериальной транспортной задачи

Постановка двухкритериальной транспортной задачи и методика её решения описана в работах [1, 2]. Напомним основные положения данных работ.

Известны:

$A_i$  - пункты производства продукции с объемами  $a_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ).

$B_j$  - пункты потребления с величинами спроса  $b_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ).

$c_{ij}$  - расходы на перевозку единицы продукта из  $i$ -ого пункта в  $j$ -ый.

$h_{ij}$  - степень важности перевозки единицы продукта из  $i$ -ого пункта в  $j$ -ый.

План перевозки продукции из  $i$ -ого пункта в  $j$ -ый определяется величиной  $x_{ij}$ .  
 $x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ . Требуется найти план перевозки такой, чтобы минимизировать значения расходов и максимизировать степень важности:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n h_{ij} x_{ij} \rightarrow \max. \quad (2)$$

Линейные ограничительные условия, накладываемые на элементы решения:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, & (4) \\ x_{ij} \geq 0. & (5) \end{cases}$$

$$i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Множество векторов  $x$ , удовлетворяющих условиям (3)-(5), обозначим через  $X$ .

### Решение задачи

Введем обозначения:

$$L^1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min,$$

$$L^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n h_{ij} x_{ij} \rightarrow \max$$

при ограничениях (3) – (5).

Приведем критерии к однородному виду, путем преобразования критерия  $L^1$ :

$$\tilde{L}^1 = -L^1.$$

Решение многокритериальной задачи может быть представлено в виде множества Парето [3-6].

Множество Парето  $Q \subseteq X$  характеризуется тем, что ни одно решение из данного множества не может быть улучшено по какому-либо одному критерию без ухудшения хотя бы одного из оставшихся:

$$x^* \in Q \Leftrightarrow (\forall x \in X, x \neq x^*) \neg \left( (L^k(x) \geq L^k(x^*)) \wedge (\exists_i L^k(x) > L^k(x^*)) \right),$$

$k = \overline{1, l}$ , где  $l$  — количество критериев задачи.

Для построения множества Парето в рассматриваемой задаче многокритериального линейного программирования будем использовать многокритериальный симплекс-метод.

Алгоритм многокритериального симплекс-метода:

1. Формирование пустого множества паретовских вершин  $S$ ;
2. Нахождение первой паретовской вершины  $x^1 \in S$ .  $x^1$  — решение задачи линейного программирования с целевой функцией:

$$\tilde{L}^1(x) + L^2(x) \rightarrow \max.$$

3. В работе [6] также показан способ построения множества паретовских точек  $S$  путем перебора узлов  $\mu$ -мерной  $\varepsilon$ -сети на интервале  $(0, 1)$ :

$$\begin{aligned} \mu &\in R^\eta, \\ \mu_z &\in (0, 1), \\ 0 &< \mu_1 < \dots < \mu_\eta < 1, \\ z &= \overline{1, \eta}. \end{aligned}$$

Решение задачи линейного программирования

$$\max L^\mu(x) = \max(\mu \tilde{L}^1(x) + (1 - \mu)L^2(x))$$

для каждого из узлов  $\mu_z$  представляет собой паретовскую вершину;

4. Формирование множества Парето  $Q$  на основе множества паретовских вершин  $S$ . Множество Парето  $Q$  в критериальном пространстве представляет собой объединение ребер, соединяющих соседние паретовские вершины симплекса  $L(X)$ .

Множество Парето предполагает равнозначность найденных решений. Для выделения единственного решения из множества Парето может быть использован способ точечной характеристики [7, 8].

При выделении единственного решения учитывается паретовское множество  $Q$  целиком. Точечная характеристика  $\tilde{x}$  отражает конфигурацию множества Парето  $Q$ .

Алгоритм точечной характеристики состоит в следующем:

1. Построение выпуклой комбинации  $x_0$  всех точек из множества паретовских вершин  $S$  с равными весами.
2. Выделение искомой точки  $\tilde{x}$  из множества Парето  $Q$ , максимально улучшающей выпуклую комбинацию  $x_0$ , используя программу отсутствия мажорирования:

$$x^* \in Q \Leftrightarrow f = 0,$$

где  $f$  – решение задачи линейного программирования:

$$f = \max_x \sum_{i=1}^l p_i, \text{ или,}$$

при

$$X^* = \{(x, l) \in R^{n+l} \mid L^k(x) - p_k \geq L^k(x^*), p_k \geq 0\}, \\ k = \overline{1, l}.$$

Результат решения задачи — искомая характеристика  $\tilde{x}$ .

#### Этапы разработки программного комплекса

Ручная реализация решения двухкритериальной транспортной задачи является трудоёмким и затратным по времени процессом. Чтобы ускорить и упростить процесс решения, возникает необходимость его автоматизации. Для этого был разработан программный комплекс решения двухкритериальной транспортной задачи (ПК РДТЗ). Процесс разработки ПК РДТЗ включал этапы:

1. Подготовка технического задания.
2. Выбор среды для разработки.
3. Проектирование архитектуры.
4. Разработка алгоритмов работы подсистем.
5. Кодирование ПК РДТЗ.
6. Тестирование.

Техническое задание состоит в следующем: в программном комплексе должен быть реализован в полном объёме математический аппарат для решения двухкритериальной транспортной задачи. Он должен включать нахождение множества Парето, выделение единственного решения, построение графических результатов.

Для работы программному комплексу требуются исходные данные. Он должен поддерживать возможность ввода данных вручную из терминала, а также получения их из заранее подготовленного конфигурационного файла. Исходные данные должны быть проверены. В случае если в них содержатся ошибки, нужно оповещать об этом пользователя. Результаты работы ПК также должны быть показаны пользователю.

ПК поддерживает работу в большинстве ОС семейства Linux с графической оболочкой. Разработка выполнялась в ОС Manjaro Linux.

Язык программирования, на котором написан ПК — Python версии 3.7 [9]. Для разработки использовались интегрированная среда (IDE) PyCharm и текстовые редакторы Sublime Text Editor, Vim [10]. С их помощью выполнялись анализ, отладка и рефакторинг кода.

При разработке использовались следующие модули:

- `lpsolve` [11] — для решения задачи линейного программирования с одним критерием;
- `numpy` [12] — для работы с многомерными массивами;
- `pyplot` из `matplotlib` [13] — для создания графиков;
- `subprocess` [14] — порождает новые процессы в операционной системе, позволяет получить данные из потоков стандартных ввода, вывода и сообщений об ошибках.

### Архитектура программного комплекса

С учётом технического задания спроектирована архитектура ПК РДТЗ. Архитектура включает подсистемы:

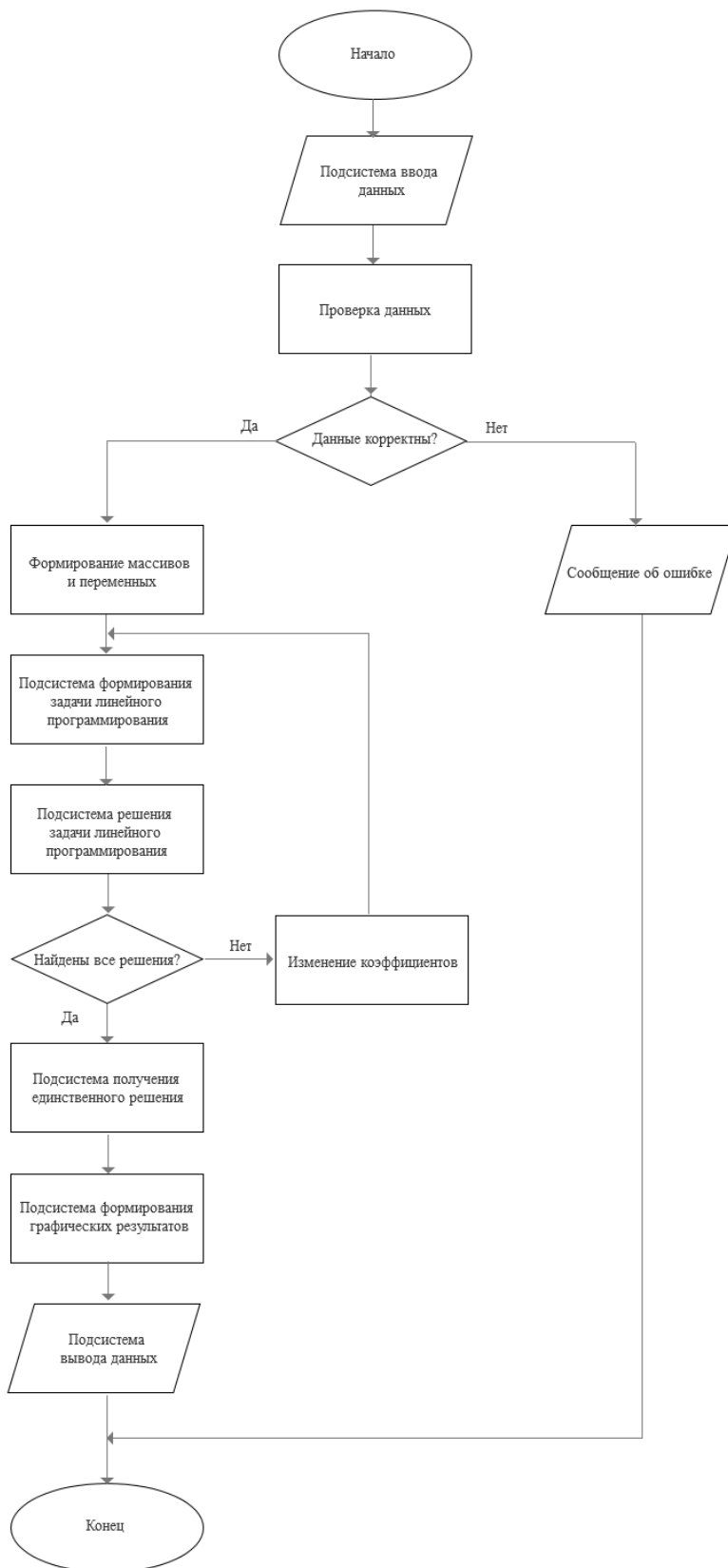
- подсистема управления;
- подсистема ввода данных;
- подсистема формирования задачи линейного программирования;
- подсистема решения задачи линейного программирования;
- подсистема формирования множества Парето;
- подсистема получения единственного решения;
- подсистема формирования графических результатов;
- подсистема вывода данных.

Схема архитектуры подсистем представлена на рисунке 1.



Рис. 1. Схема архитектуры подсистем ПК РДТЗ

Блок-схема общего алгоритма ПК РДТЗ представлена на рисунке 2.



**Рис. 2. Общий алгоритм ПК**

Основной является подсистема управления. Она связывает остальные подсистемы и организует их взаимодействие. К её функциям относятся запуск подсистем, проверка и обработка результатов их выполнения, хранение переменных и постоянных, которые требуются для работы.

При запуске ПК подсистема управления предлагает выбрать пользователю язык для работы с программой. Доступны русский и английский языки. В зависимости от выбора формируется набор сообщений, которые выводятся пользователю для интерактивного взаимодействия с ПК. Наборы сообщений хранятся в виде словарей.

Пользователь выбирает способ ввода условий задачи. Данные можно ввести в терминале или указать в конфигурационном файле. Конфигурационный файл расположен в той же директории, что и исходный код программы. Данные указываются поочередно:

- количество неизвестных;
- коэффициенты, стоящие перед каждой из неизвестных, для каждой целевой функции;
- типы экстремума целевых функций;
- количество ограничений;
- коэффициенты, стоящие перед каждой из неизвестных, для каждого ограничения;
- типы неравенств ограничений;
- коэффициенты правых частей ограничений.

При вводе данных ПК РДТЗ проверяет их на корректность. Например, в качестве количества неизвестных может быть указано только число, а в качестве типов экстремумов целевых функций только значение "max" или "min". Если указаны некорректные данные, то показывается, какие именно.

После сохранения переменных запускается подсистема формирования задачи линейного программирования. Для нахождения первой паретовской точки коэффициенты целевых функций складываются. Для нахождения последующих точек коэффициенты первой целевой функции умножаются на  $n$ , а коэффициенты второй целевой функции на  $1-n$ . Соответствующие коэффициенты целевых функций складываются для получения одной целевой функции. Формируются переменные для передачи пакету `Ipsolve`. В переменные записываются количество неизвестных, коэффициенты целевой функции, тип экстремума, коэффициенты и типы ограничений.

Сформированные значения передаются подсистеме решения задачи линейного программирования. При запуске подсистемы проверяется существование решения задачи линейного программирования. Если решение существует, то оно находится с помощью пакета `Ipsolve`, округляется до заданной точности и сохраняется.

Пока не будут найдены все решения, изменяются коэффициенты целевых функций, и работа подсистем формирования и решения задачи линейного программирования повторяется.

Подсистема формирования множества Парето обрабатывает найденные решения, находит паретовские точки и строит множество Парето.

Подсистема получения единственного решения выделяет из полученного множества решение, которое его характеризует и может быть рассмотрено, как его "полномочный член".

Множество Парето и единственное решение передаются подсистеме формирования графических результатов. Она строит график и отображает его пользователю. После этого подсистема вывода данных формирует для пользователя результат решения многокритериальной задачи линейного программирования.

Для получения единственного решения выполняется точечная характеристика. Если количество найденных решений более чем одно, то вычисляется весовой коэффициент паретовских вершин:

$$W = \frac{1}{n},$$

где  $n$  — количество решений.

Весовой коэффициент округляется. Формируется пустой массив  $P$ . Вычисляются суммы найденных значений каждой из неизвестных и умножаются на весовой коэффициент. Полученные значения записываются в массив  $P$ . Соответствующие коэффициенты целевых функций складываются для получения одной целевой функции.

Формируются переменные для передачи пакету `lpsolve`. К исходным ограничениям задачи добавляются дополнительные. Поставленная задача линейного программирования решается с помощью модуля `lpsolve`.

Если количество найденных решений более чем одно, то соответствующие им значения целевых функций сортируются по алгоритму Грэхема [15].

Формируются оси абсцисс и ординат. На график добавляются точки. Если точек более чем одна, то они соединяются отрезками. Если более двух, то затем область, ограниченная отрезками, заливается. График отображается пользователю. На графике в критериальном пространстве красным цветом отображаются паретовские вершины, зеленым — множество Парето и синим — точка, найденная в результате характеристики.

При выводе программа выдаёт условие и решение задачи. Решение включает:

- множество паретовских вершин;
- значения неизвестных, полученные в результате точечной характеристики;
- значения целевых функций, соответствующие найденным значениям неизвестных.

График множества Парето можно сохранить по нажатию соответствующей кнопки. Все остальные выходные данные программа предлагает сохранить в директории программы в файле `result.txt`.

Для демонстрации принципов работы с ПК воспользуемся классическим примером задачи из работы [6]:

$$x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_7 \rightarrow \max$$

$$x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_3 - x_4 - x_6 - x_7 \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + 2x_7 \leq 16$$

$$-2x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 + x_7 \leq 16$$

$$-x_1 + x_3 + 2x_5 - 2x_7 \leq 16$$

$$x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 - x_7 \leq 16$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 7$$

В этой задаче рассматриваются три целевые функции. Решим ее для двух: второй и третьей функций.

$$x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_3 - x_4 - x_6 - x_7 \rightarrow \max$$

Укажем все нужные данные в конфигурационном файле. Запустим программу, выберем русский язык и в качестве способа ввода данных — конфигурационный файл (рисунок 3).

```
Выберите язык | Select language:
1: RU
2: EN
1
Решение двухкритериальной задачи линейного программирования
Выберите способ ввода данных в программу:
1: Ввести в терминале
2: Получить из конфигурационного файла
2
```

Рис. 3. Выбор языка и способа ввода данных

Программа считывает данные из конфигурационного файла и решает задачу: Получаем решение задачи (рисунки 4 и 5).

```

Исходная задача
-----
Количество неизвестных: 7
Целевая функция 1: [0.0, 1.0, 1.0, 2.0, 3.0, 1.0, 0.0] -> max
Целевая функция 2: [1.0, 0.0, 1.0, -1.0, 0.0, -1.0, -1.0] -> max
Количество ограничений: 4
Ограничение 1: [1.0, 2.0, 1.0, 1.0, 2.0, 1.0, 2.0] <= 16.0
Ограничение 2: [-2.0, -1.0, 0.0, 1.0, 2.0, 0.0, 1.0] <= 16.0
Ограничение 3: [-1.0, 0.0, 1.0, 0.0, 2.0, 0.0, -2.0] <= 16.0
Ограничение 4: [0.0, 1.0, 2.0, -1.0, 1.0, -2.0, -1.0] <= 16.0

Решение задачи
-----
Множество паретовских вершин:

1:[0.0, 0.0, 5.33, 0.0, 5.33, 0.0, 0.0]
2:[16.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]
3:[8.0, 0.0, 8.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]
4:[0.0, 0.0, 10.67, 5.33, 0.0, 0.0, 0.0]
5:[0.0, 0.0, 0.0, 16.0, 0.0, 0.0, 0.0]

Точечная характеристика:

Значения неизвестных: [0.0, 0.0, 5.33, 0.0, 5.33, 0.0, 0.0]
Значения целевых функций: [21.32, 5.33]

Сохранить результат в файл?
у: да
п: нет

```

Рис. 4. Решение задачи

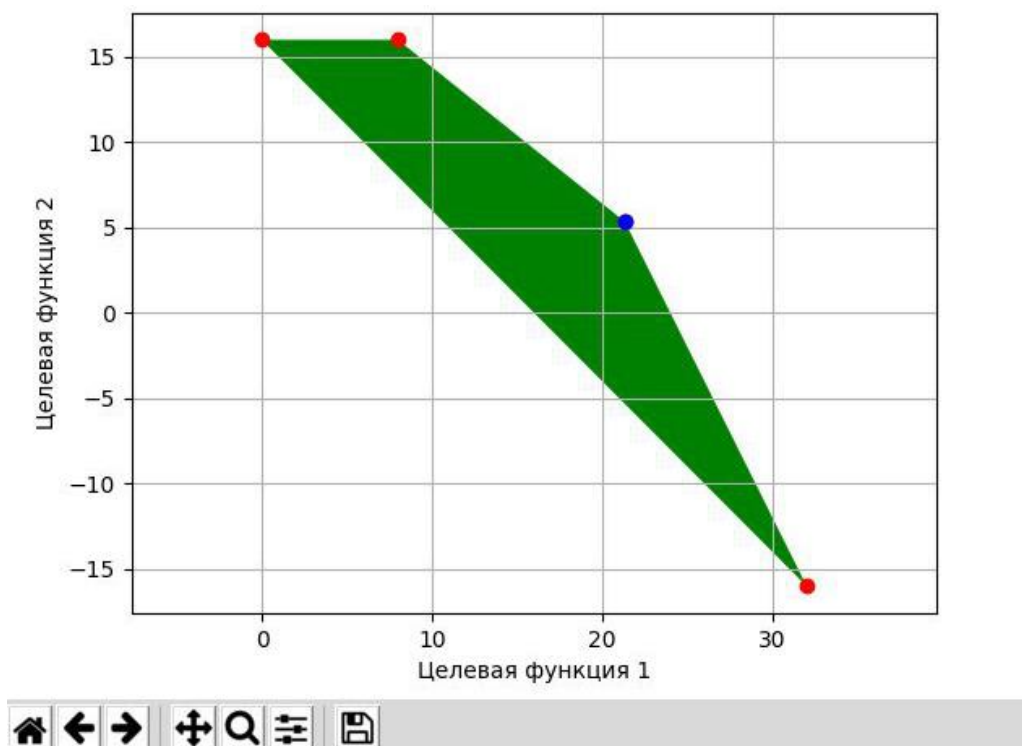


Рис. 5. Решение задачи



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кошкин, Б. П. О многокритериальной транспортной задаче / Б. П. Кошкин, С. И. Носков, В. А. Оленцевич, А. И. Рязанцев // *Фундаментальные исследования*. 2017. № 7. С. 35-38.
2. Носков, С. И. Двухкритериальная транспортная задача / С. И. Носков, А. И. Рязанцев // *T-Comm: Телекоммуникации и транспорт*. 2019. Т.13. № 2. С. 59-63.
3. Баенхаева, А. В. Моделирование валового регионального продукта Иркутской области на основе применения методики множественного оценивания / А. В. Баенхаева, М. П. Базилевский, С. И. Носков. // *Фундаментальные исследования*. 2016. №10. Ч. 1. С. 9-14.
4. Носков, С. И. Многокритериальная оценка уровня уязвимости объектов транспорта / С. И. Носков, В. А. Протопопов // *Транспорт России: проблемы и перспективы – 2016: материалы Международной научно-практической конференции*. 2016. С. 98-102.
5. Носков, С. И. Технология моделирования объектов с нестабильным функционированием и неопределенностью в данных [Текст] / С. И. Носков. Иркутск: РИЦ ГП «Облформпечать», 1996. 320 с.
6. Yu, L. The set of all nondominated solutions in linear cases and multicriteria simplex method / L. Yu, M. Zeleny // *J. of Math. Anal. and Applic.* 1975. Vol. 45. № 2. pp. 430-468.
7. Носков, С. И. Проблема единственности Парето-оптимального решения в задаче линейного программирования с векторной целевой функцией / С. И. Носков // *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование*. 2011. № 5. С. 283-285.
8. Носков, С.И. Точечная характеристика множества Парето в линейной многокритериальной задаче [Текст] // *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование*. 2008. № 1. С. 99-101.
9. Programming language — Python [Электронный ресурс] — Режим доступа: URL: <https://python.org/> (04.05.2019)
10. Vim - the ubiquitous text editor [Электронный ресурс] — Режим доступа: URL: <https://www.vim.org/> (04.05.2019)
11. Introduction to Ip\_solve 5.5.2.5 [Электронный ресурс] — Режим доступа: URL: <http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/> (04.05.2019)
12. NumPy [Электронный ресурс] — Режим доступа: URL: <http://numpy.org/> (04.05.2019)
13. Matplotlib Version 3.0.2 [Электронный ресурс] — Режим доступа: URL: <https://matplotlib.org/> (04.05.2019)
14. Subprocess — Subprocess management [Электронный ресурс] — Режим доступа: URL: <https://docs.python.org/3/library/subprocess.html> (4.05.2019)
15. Graham, R. L. An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set // *Information processing letters*. 1972. № 1. P. 132-133.

## REFERENCES

1. Koshkin, B. P. O mnogokriterial'noy transportnoy zadache [About multi-criteria transport problem] / B. P. Koshkin, S. I. Noskov, V. A. Olentsevich, A. I. Ryazantsev // *Fundamental'nye issledovaniya*. 2017. № 7. P. 35-38.
2. Noskov, S. I. Dvuhkriterial'naya transportnaya zadacha [Two-criteria transport problem] / S. I. Noskov, A. I. Ryazantsev // *T-Comm: Telekommunikatsii I transport*. 2019. Part.13. № 2. pp. 59-63
3. Baenhaeva, A. V. Modelirovanie valovogo regional'nogo produkta Irkutskoy oblasti na osnove primeneniya metodiki mnozhestvennogo otsenivaniya [Simulation of the gross regional product of the Irkutsk region based on the application of the method of multiple estimation] / A. V. Baenhaeva, M. P. Bazilevskiy, S. I. Noskov // *Fundamental'nye issledovaniya*. 2016. №10. Part 1. pp. 9-14.

4. Noskov, S. I. Mnogokriterial'naya otsenka urovnya uyazvimosti obyektov [Multi-criteria assessment of transport objects vulnerability] / S. I. Noskov, V. A. Protopopov // Transport Rossii: problem I perspektivy — 2016: materialy Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. — 2016. — P. 98-102.
5. Noskov, S. I. Tehnologiya modelirovaniya obyektov s nestabil'nym funkcionirovaniem i neopredelennost'u v dannyh [Technology of modeling objects with unstable functioning and uncertainty in the data] [Text] / S. I. Noskov. Irkutsk : RIC GP «Oblonformpechat». 1996. 320 p.
6. Yu, L. The set of all nondominated solutions in linear cases and multicriteria simplex method / L. Yu, M. Zeleny // J. of Math. Anal. and Applic. 1975. Vol. 45. № 2. pp. 430-468.
7. Noskov, S. I. Problema edinstvennosti Pareto-optimal'nogo resheniya v zadache lineynogo programmirovaniya s vektornoy tselevoy [The problem of uniqueness of the Pareto-optimal solution in a linear programming problem with a vector objective function] / S. I. Noskov // Sovremennye tehnologii. Sistemnyy analiz. Modelirovanie. 2011. № 5. pp. 283-285.
8. Noskov, S. I. Tochehnaya harakterizatsiya mnozhestva Pareto v lineynoy mnogokriterial'noy zadache [Point characterization of the Pareto set in a linear multicriteria problem] [Text] // Sovremennye tehnologii. Sistemnyy analiz. Modelirovanie. 2008. № 1. pp. 99-101.
9. Programming language — Python [Electronic resource] — Access mode: URL: <https://python.org/> (04.05.2019)
10. Vim - the ubiquitous text editor [Electronic resource] — Access mode: URL: <https://www.vim.org/> (04.05.2019)
11. Introduction to Ip\_solve 5.5.2.5 [Electronic resource] — Access mode: URL: <http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/> (04.05.2019)
12. NumPy [Electronic resource] — Access mode: URL: <http://numpy.org/> (04.05.2019)
13. Matplotlib Version 3.0.2 [Electronic resource] — Access mode: URL: <https://matplotlib.org/> (04.05.2019)
14. Subprocess — Subprocess management [Electronic resource] — Access mode: URL: <https://docs.python.org/3/library/subprocess.html> (04.05.2019)
15. Graham, R. L. An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set // Information processing letters. 1972. № 1. pp. 132-133.

### **Информация об авторах**

*Рязанцев Антон Игоревич* – аспирант кафедры «Информационные системы и защита информации», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: [tonygrx@yandex.ru](mailto:tonygrx@yandex.ru).

### **Authors**

*Ryazantsev Anton Igorevich* –Postgraduate Student of the Department "Informatics Systems and Information Security", Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: [tonygrx@yandex.ru](mailto:tonygrx@yandex.ru).

### **Для цитирования**

Рязанцев А.И. Программный комплекс решения двухкритериальной транспортной задачи [Электронный ресурс] / А.И. Рязанцев // Молодая наука Сибири: электрон. науч. журн. – 2019. – №3. – Режим доступа: <http://mnv.irkups.ru/toma/35-2019>, свободный. – Загл. с экрана. – Яз. рус., англ. (дата обращения: 18.09.2019)

### **For citation**

Ryazantsev A.I. *Programmnyj kompleks reshenija dvuhkriterial'noj transportnoj zadachi* [Program complex of solving two criteria transport problem]. *Molodaya nauka Sibiri: ehlektronnyj nauchnyj zhurnal* [Young science of Siberia: electronic scientific journal], 2019, no. 3. [Accessed 18/09/19] (in Russian)