И. С. Овечкин ¹, М. М. Поляков ¹

1 Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Российская Федерация

ИЗМЕНЕНИЕ СИГНАЛА НА ВЫХОДЕ ЛИНЕЙНОГО КОЛЕБАТЕЛЬНОГО КОНТУРА ПРИ ПРИБЛИЖЕНИИ ЧАСТОТЫ К РЕЗОНАНСНОЙ

Аннотация. Поставлена проблема, заключающая в том, как изменяется сигнал на выходе нелинейного колебательного контура при приближении частоты к резонансной. Так как у многих авторов не представлены наглядные графики поведения сигнала на выходе колебательного контура при изменении частоты, было предложено произвести компьютерное моделирование изменения сигнала на выходе нелинейного колебательного контура при приближении частоты к резонансной в пакете Mathcad. Произведено компьютерное моделирование выходного сигнала на выходе колебательном контуре при приближении циклической частоты к резонансной при разных начальных параметрах. По результатам моделирования представлены рисунки, которые показывают, как изменяется амплитуда сигнала на выходе при постепенном приближении к резонансной частоте. На основании полученных рисунки выполнен анализ изменения амплитуды сигнала на выходе.

Ключевые слова: колебательный контур, дифференциальное уравнение, нелинейность, резонанс, частота, Mathcad.

I. S. Ovechkin ¹, M. M. Polyakov ¹

¹ Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation

CHANGE OF THE SIGNAL AT THE OUTPUT OF THE LINEAR OSCILLATORY CIRCUIT WHEN THE FREQUENCY APPROACHES TO THE RESONANCE

Abstract. The problem is posed, which consists in how the signal at the output of a nonlinear oscillatory circuit changes when the frequency approaches the resonant one. Since many authors do not present visual graphs of the behavior of the signal at the output of the oscillatory circuit when the frequency changes, it was proposed to perform computer simulation of the change in the signal at the output of the nonlinear oscillatory circuit when the frequency approaches the resonant one in the Matchad package. Computer simulation of the output signal at the output of the oscillatory circuit when the cyclic frequency approaches the resonant one for different initial parameters. Based on the simulation results, figures are presented that show how the signal amplitude at the output changes with a gradual approach to the resonant frequency. Based on the figures obtained, an analysis of the change in the signal amplitude at the output is carried out.

Keywords: oscillatory circuit, differential equation, nonlinearity, resonance, frequency, Mathcad.

Введение

В настоящее время в области радиотехники применяют разнообразные электрические колебательные системы. Самая простая из них — колебательный контур. Колебательный контур — это электрическую цепь, включающую в себя емкость С, индуктивность L и активное сопротивление R (рис. 1). Содержание активного сопротивления R, обусловленное потерями энергии в контуре. В приемном устройстве колебательный контур определяет частотную избирательность приемника и может использоваться в следующих узлах: входной цепи, усилителе высокой частоты, в преобразователе частоты. В передающих устройствах колебательные контуры и применяются в автогенераторах, усилителях, умножителях частоты и других узлах. Но для нас особый интерес в колебательном контуре представляет резонансная частота и то, как ведет себя система при приближении частоты к резонансной частоте, т.е. как долго или быстро при приближении частоты к резонансной осуществляется нарастание тока на выходе колебательного контура. Увлекшись данной тематикой и просмотрев множество литературы, было обнаружено, что в большинстве случаев авторы упоминают про резонансную частоту, приводят формулы и график того, когда частота равна

резонансной, но нет ни информации, ни графических иллюстраций того, как ведет себя ток на выходе колебательного контура при приближении частоты к резонансной. А так как в большинстве случаев характер изменения тока при увеличении частоты имеет особое значение, было принято решение рассмотреть характер изменения тока на выходе колебательного контура с помощью пакета Mathcad и графически представить полученные зависимости.

Получение исходного дифференциального уравнения, его решение и проверка найденного решения

Возьмем простейший колебательный контур (рис. 1) и рассмотрим, как изменяется напряжение на его выходе при приближении частоты к резонансной.

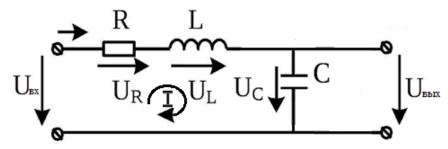


Рис. 1. Колебательный контур

Для исходной электрической цепи (рис. 1), обойдя первый контур, составим по второму закону Кирхгофа уравнение:

$$u_R + u_L + u_C = 0, (1)$$

Перепишем (1) в следующем виде:

$$i \cdot R + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i dt = 0, \qquad (2)$$

Продифференцируем (2):

$$L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = 0, \qquad (3)$$

Разделим (3) на L:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot i = 0, \tag{4}$$

Будем подавать на вход периодический гармонический сигнал $u_{\rm ex} = U_m \cdot \sin(\omega t)$ с амплитудой U_m и периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Тогда (4) запишется:

$$\frac{d^{2}i}{dt^{2}} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot i = U_{m} \cdot \sin(\omega t)$$
 (5)

Для удобства дальнейших расчетов переобозначим:

$$i = x(t); \ \frac{R}{L} = \delta; \ \frac{1}{L \cdot C} = \omega_0^2; \ U_m = f.$$

Перепишем выражение (5):

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \delta \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot x(t) = f \cdot \sin(\omega t)$$
 (6)

Рассмотрим случай, когда первая производная равна 0, т.е.

$$\delta \cdot \frac{dx(t)}{dt} = 0.$$

Тогда (6) запишется в виде:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x(t) = f \cdot \sin(\omega t) \tag{7}$$

Решая полученное дифференциальное уравнение аналитически, получаем, что:

$$x(t) = \frac{f \cdot \omega}{\omega_0 \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)} \cdot \sin(\omega_0 t) + \frac{f}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \cdot \sin(\omega t), \tag{8}$$

Теперь попробуем решить это же дифференциальное уравнение в пакете Mathcad и сравнить полученные результаты.

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + w0^2x(t) = 0.01 \cdot \sin(w \cdot t)$$
 Исходное дифференциальное уравнение
$$x(0) = 0 \quad x'(0) = 0$$

$$x := 0 \cdot 0.01 ... 3$$

$$x(t1) := \frac{-0.01 \cdot w}{w0 \cdot (w0^2 - w^2)} \cdot \sin(w0 \cdot t1) + \frac{0.01}{w0^2 - w^2} \cdot \sin(w \cdot t1)$$
 Решение, полученное аналитически
$$\frac{6 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-3}}$$

$$\frac{2 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-3}}$$

$$\frac{2 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-3}}$$

$$\frac{1}{4 \times 10^{-3}}$$

$$\frac{2}{4 \times 10^{-3}}$$

$$\frac{1}{4 \times 10^{-3$$

Рис. 2. Графическое сопоставление решения, полученного аналитически, и решения, полученного с помощью Mathcad

Как видно графики (рис. 2) совпадают, значит, наше аналитическое решение получено верно.

Общий алгоритм построения зависимостей амплитуды от времени для случая, когда первая производная равна нулю

Теперь посмотрим, как ведет себя функция при приближении частоты ω к резонансной частоте ω_0 . Для этого используем пакет Mathcad.

Но сначала зададим исходные параметры:

$$\delta = 0$$
; $\omega_0^2 = 9$; $f = 0.05$.

Полученные зависимости изображены на рис. 3-12.

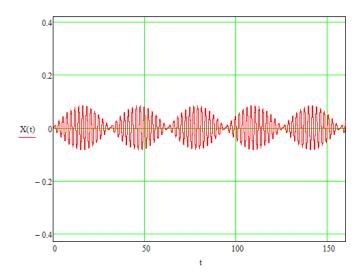


Рис. 3. Сигнал на выходе колебательного контура при $\,\omega=2,\!8$, $\,\omega_0^{}=3\,$

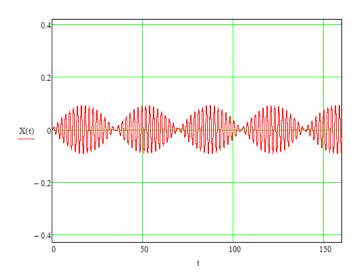


Рис. 4. Сигнал на выходе колебательного контура при $\,\omega=2,\!82$, $\,\omega_{_0}=3\,$

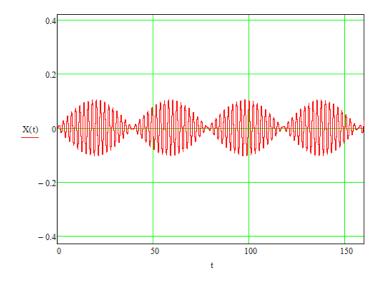


Рис. 5. Сигнал на выходе колебательного контура при $\,\omega=2,\!84$, $\,\omega_0=3\,$

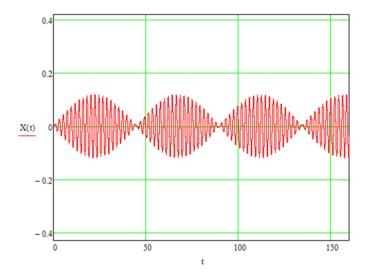


Рис. 6. Сигнал на выходе колебательного контура при $\,\omega=2,\!86$, $\,\omega_{_0}=3\,$

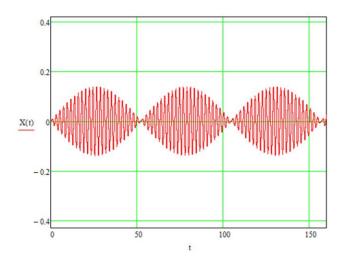


Рис. 7. Сигнал на выходе колебательного контура при $\,\omega=2,\!88$, $\,\omega_{_0}=3\,$

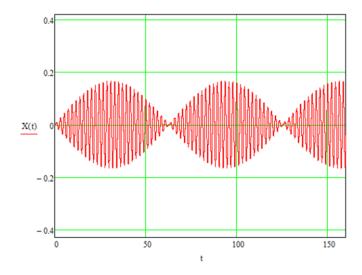


Рис. 8. Сигнал на выходе колебательного контура при $\,\omega=2.9$, $\,\omega_0=3\,$

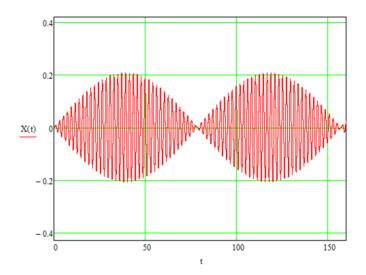


Рис. 9. Сигнал на выходе колебательного контура при $\,\omega=2{,}92$, $\,\omega_{_0}=3\,$

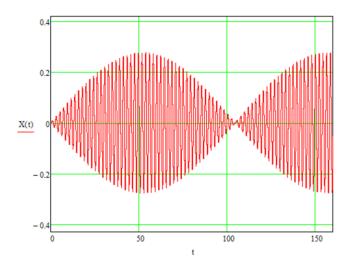


Рис. 10. Сигнал на выходе колебательного контура при $\,\omega=2{,}94$, $\,\omega_{_0}=3\,$

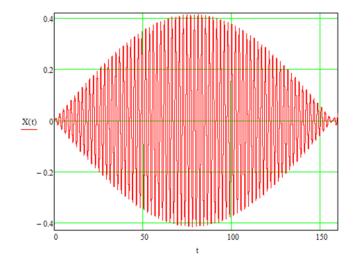
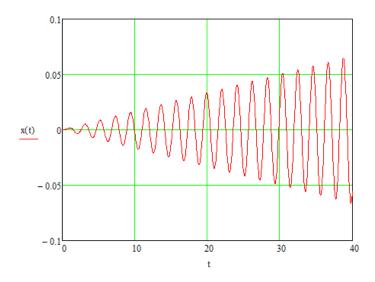


Рис. 11. Сигнал на выходе колебательного контура при $\,\omega=2,\!96$, $\,\omega_0^{}=3\,$



Puc. 12. Сигнал на выходе колебательного контура при $\,\omega=2{,}99$, $\,\omega_{_0}=3\,$

Общий алгоритм построения зависимостей амплитуды от времени для случая, когда первая производная не равна нулю (система с трением)

Теперь рассмотрим, как изменятся графики на рис. 3-11, если первая производная в (6) не равна 0, т. е. $\delta \cdot \frac{dx(t)}{dt} \neq 0$.

Тогда, мы имеем дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \delta \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot x(t) = f \cdot \sin(\omega t).$$

Исходные данные примут вид:

$$\delta = 0.001$$
; $\omega_0^2 = 9$; $f = 0.05$.

Так же смоделируем решение этого дифференциального уравнения в пакете Mathcad при приближении частоты ω к резонансной частоте ω_0 . Полученные результаты представлены на рис. 13-19.

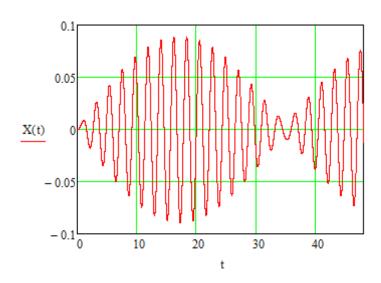


Рис. 13. Сигнал на выходе колебательного контура при $\omega = 2.82$, $\omega_0 = 3$

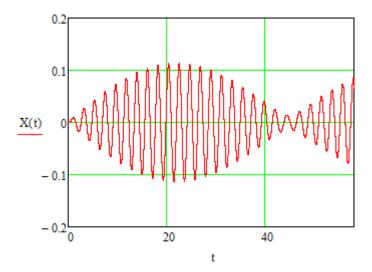


Рис. 14. Сигнал на выходе колебательного контура при $\,\omega=2,\!86$, $\,\omega_0^{}=3\,$

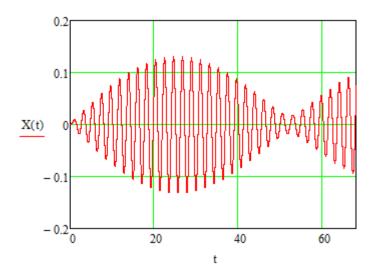
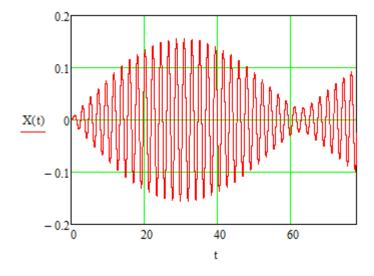


Рис. 15. Сигнал на выходе колебательного контура при $\,\omega=2,\!88$, $\,\omega_0^{}=3\,$



Puc. 16. Сигнал на выходе колебательного контура при $\,\omega=2.9$, $\,\omega_{_0}=3\,$

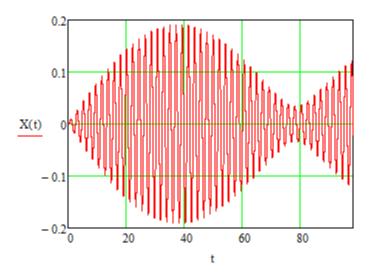


Рис. 17. Сигнал на выходе колебательного контура при $\,\omega=2{,}92$, $\,\omega_0=3\,$

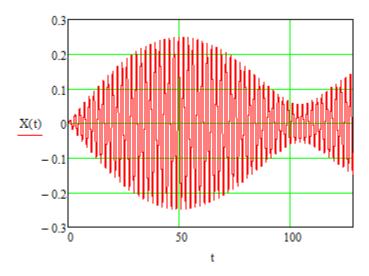


Рис. 18. Сигнал на выходе колебательного контура при $\,\omega=2{,}94$, $\,\omega_0^{}=3\,$

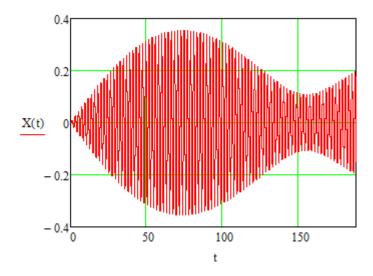


Рис. 19. Сигнал на выходе колебательного контура при $\,\omega=2,\!96$, $\,\omega_0^{}=3\,$

Заключение

Проведенные исследования показывают, что при увеличении на 0,02 с циклической частоты, составляющей 93,3% от резонансной, в начале наблюдались малые увеличения амплитуды на выходе колебательного контура, а вот при увеличении частоты от 2,92 до 2,96, амплитуда увеличилась в два раза. Это говорит о том, что сначала система постепенно входит в резонанс, а после при таком же постепенном увеличении частоты, амплитуда резко возрастает и система быстро выходит на резонанс. При этом период увеличивается пропорционально амплитуде и имеет похожую зависимость от частоты. Анализ рисунков 13-19 показывает, что при наличии первой производной, которая является аналогом трения, графики при одной и той же частоте с трение и без трения имеют разную амплитуду. При одной и той же частоте для случая с трением амплитуда выходного сигнала меньше чем амплитуда сигнала на выходе колебательного контура без трения. Наличие первой производной, трения, замедляет возрастание частоты, но при этом если для графиков без трения огибающая проходит через ноль, то для графиков с трением огибающая не доходит до нуля. Достигая ненулевого наименьшего значения, огибающая вновь возрастает. При этом было замечено, что чем ближе циклическая частота к резонансной, тем больше это минимальное значение, которое достигает огибающая. Данное исследование позволяет уменьшить амплитуду на выходе колебательного контура при приближении частоты к резонансной, что является очень важной задачей для многих отраслей промышленности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учебник для бакалавров / Л.А. Бессонов. М.: Юрайт, 2015. 701 с.
- 2. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я., Данко С. П. Высшая математика в упражнениях и задачах // Оникс, Мир и Образование М., 2008. 816 с.
- 3. Ахмадеева А.А., Гозбенко В.Е. Динамические свойства вагона с двухступенчатым рессорным подвешиванием // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2010. N 3 (27). С. 60-69.
- 4. Гозбенко В.Е., Каргапольцев С.К., Ахмадеева А.А. Динамические свойства железнодорожного вагона // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2015. № 4 (48). С. 24–29.
- 5. Лундалин А.А., Пузина Е.Ю., Худоногов И.А., Кашковский В.В. Анализ надежности электроснабжения транспортных систем в зависимости от состояния устройств релейной защиты и автоматики // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2019. № 3 (63). С. 127-135.
- 6. Гозбенко В.Е., Ахмадеева А.А. Вертикальные колебания экипажа с учетом неровностей пути // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2013. № 3 (39). С. 56–59.
- 7. Ступицкий В.П., Худоногов И.А., Тихомиров В.А., Лобанов О.В. Повышение достоверности диагностирования состояния несущего троса контактной сети // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2020. № 1 (65). С. 136-143.
- 8. Поляков М.М. О связи парциальных и собственных частот в линейных механических системах с двумя степенями свободы // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2016. № 3 (51). С. 25-28.

REFERENCES

- 1. Bessonov, L.A. Theoretical foundations of electrical engineering. Electrical circuits: A textbook for bachelors / L.A. Bessonov. M .: Yurayt, 2015. 701 p.
- 2. Danko P. E., Popov A. G., Kozhevnikova T. Ya., Danko S. P. Higher mathematics in exercises and problems // Onyx, Peace and Education M., 2008. 816 p.
- 3. Akhmadeeva A.A., Gozbenko V.E. Dynamic properties of a car with two-stage spring suspension // Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie [Modern Technologies. System Analysis. Modeling], 2010. No. 3 (27). S. 60-69.

- 4. Gozbenko V.E., Kargapol'tsev S.K., Akhmadeeva A.A. Dinamicheskie svoistva zheleznodorozhnogo vagona [Dynamic properties of the railway car]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie* [Modern Technologies. System Analysis. Modeling], 2015, No. 4 (48), pp. 24–29.
- 5. Lundalin A.A., Puzina E.Yu., Khudonogov I.A., Kashkovsky V.V. Analysis of the reliability of power supply of transport systems depending on the state of relay protection and automation devices // Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie [Modern Technologies. System Analysis. Modeling], 2019. No. 3 (63). S. 127-135.
- 6. Gozbenko V.E., Akhmadeeva A.A. Vertikal'nye kolebaniya ekipazha s uchetom nerovnostei puti [Vertical oscillations of the crew taking into account the unevenness of the track]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie [Modern Technologies. System Analysis. Modeling*], 2013, No. 3 (39), pp. 56–59.
- 7. Stupitsky V.P., Khudonogov I.A., Tikhomirov V.A., Lobanov O.V. Improving the reliability of diagnosing the state of the overhead cable carrier // Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie [Modern Technologies. System Analysis. Modeling], 2020. No. 1 (65). S. 136-143.
- 8 Polyakov M.M. On the relationship of partial and natural frequencies in linear mechanical systems with two degrees of freedom // Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie [Modern Technologies. System Analysis. Modeling], 2016. No. 3 (51). S. 25-28.

Информация об авторах

Овечкин Илья Сергеевич — студент 3 курса специальности «Электроснабжение железных дорог», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, е-mail: iliaov2015@mail.ru

Поляков Михаил Михайлович — к.ф.-м.н., доцент кафедры «Математика», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: mmpol@mail.ru

Authors

Ovechkin Ilya Sergeevich – 3rd year student of the specialty «Power supply of railways», Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: iliaov2015@mail.ru

Polyakov Mikhail Mikhailovich – Ph.D., associate professor Department of «Mathematics», Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: mmpol@mail.ru

Для цитирования

Овечкин И.С. Изменение сигнала на выходе нелинейного колебательного контура при приближении частоты к резонансной [Электронный ресурс] / И. С. Овечкин, М. М. Поляков // Молодая наука Сибири: электрон. науч. журн. — 2021. — №12. — Режим доступа: http://mnv.irgups.ru/toma/121-2021, свободный. — Загл. с экрана. — Яз. рус., англ. (дата обращения: 13.05.2021)

For citation

Ovechkin I.S., Polyakov M.M. Changes in the signal at the output of a nonlinear oscillatory circuit when the frequency approaches the resonance [Electronic resource] / I.S. Ovechkin, M.M. Polyakov // Molodaya nauka Sibiri: ehlektronnyj nauchnyj zhurnal [Young science of Siberia: electronic scientific journal], 2021, no. 12. [Accessed 13/05/21]