УДК *519.245*

А. В. Москвитина[1], М. В. Феоктистова[1], О. Д. Толстых[1]

[1]Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Российская Федерация

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Аннотация. *В данной статье для изучения вероятностных закономерностей рассмотрен метод Монте-Карло, так как данный метод позволяет моделировать (разыгрывать) случайные величины. Для применения метода Монте-Карло при решении прикладных вероятностных задач показано на задачах оценки надежности простейших систем и систем массового обслуживания. Метод Монте-Карло при решении приведенных в счете задач реализуется с использованием пакета Exsel.*

Ключевые слова: *Случай, закономерность, моделирование, статистическое испытание, вероятность, алгоритм, математическое ожидание, оценка надежности, система массового обслуживания.*

A. V. Moskvitina[1], M. V. Feoktistova[1] , O. D. Tolstykh[1]

[1]Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation

IMPLEMENTATION OF THE MONTE-CARLO METHOD IN RESEARCH RANDOM PROCESS

Abstract. *In this article to study probabilistic patterns the Monte-Carlo method is considered, since this method allows to model random variables. A number of problems solved by this method are considered. For the application of the Monte Carlo method in solving applied probabilistic problems, it is shown on the problems of evaluating the reliability of the simplest systems and Queuing systems. The Monte-Carlo method is implemented using the Exsel package for solving the problems listed in the invoice.*

Keywords: *Case, pattern, modeling, statistical testing, probability, algorithm, mathematical expectation, reliability estimation, Queuing system.*

Введение

Замечали ли вы такие закономерности, которые являются абсолютно случайными, но вовсе так не выглядят? Почему для нас случайные алгоритмы выглядят так странно? Дело в том, что людям свойственно выискивать в случайных, не связанных между собой, событиях какие-либо схемы, модели и приписывать им значения, которые, по их мнению, кажутся обоснованными и логичными. Все мы страдаем от ошибок предвзятости, что в нашей повседневной жизни очень влияет на принятие решений. Изучая этот вопрос подробнее, ученые пришли к выводу, что у людей смутное представление о случайности, они не способны распознать и осознанно воспроизвести ее, и, что хуже всего, мы постоянно недооцениваем роль случая в нашей жизни и принимаем решения, которые нам явно не пойдут на пользу. Для понимания и изучения природы случайности к двадцатому веку стало развиваться новое направление, которое начало заниматься изучением случайностей и то, как человек их воспринимает [5]. Стало известно, что большое число случайных событий, независимо от их конкретной природы, подчиняется определенным закономерностям (вероятностным закономерностям). Существует несколько методов и подходов для изучения моделей случайного процесса. Один из них, о котором будет идти речь, является метод Монте-Карло.

Метод Монте-Карло можно определить, как метод моделирования случайных величин с целью вычисления характеристик их распределения. В 1949 г. данный метод был изложен в статье «Метод Монте-Карло» авторами Н. Метрополис и С. Улам. Также основоположниками этого метода считают американских математиков С. Улама и Дж. Неймана. Однако теоретическая основа метода была известна давно, так как задачи статистики рассчитывались иногда с помощью случайных выборок, т.е. фактически методом

Монте-Карло. Но метод стал иметь широкое применение только после появления ЭВМ, ведь моделирование случайных величин вручную – крайне трудоёмкая работа. Таким образом, возникновение универсального численного метода Монте-Карло обусловлено появлением ЭВМ.

Название «Монте-Карло» происходит от одноименного города в княжестве Монако. Этот город известен своим игорным домом, а рулетка является простейшим способом получения случайных величин. Однако, не смотря на название метода, он не помогает любителям азартных игр выигрывать в казино (см. напр. [6]).

Сущность метода Монте-Карло.

Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) состоит в решении различных задач вычислительной математики путём построения для каждой задачи случайного процесса с параметрами, равными искомым величинам этой задачи. При этом приближённое определение этих величин происходит путем наблюдения за случайным процессом и вычисления его статистических характеристик, приближенно равных искомым параметрам. Например, искомая величина x может быть равной математическому ожиданию $M\xi$ некоторой случайной величины. Тогда метод Монте-Карло для приближенного нахождения величины x состоит в N –кратной выборке значений величины ξ в серии независимых испытаний $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N$ вычислении среднего значения

$$\bar{\xi} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_3}{N}.$$

По закону больших чисел при достаточно большом значении N свероятностью, достаточно близкой к единице, $\bar{\xi} \approx M\xi = x$.

Следовательно, определённая из наблюдения над случайным процессом величина $\bar{\xi}$ приближённо равна искомой величине x.

Методом Монте-Карло в более строгом смысле называют построение искусственного случайного процесса, обладающего всеми необходимыми свойствами, но реализуемого с помощью обычных вычислительных средств. С помощью них моделируется случайный процесс и вычисляются его статистические характеристики. [4]

Наибольшие успехи данный метод имеет в областях нейтронной физики, где выделение сигналов на фоне случайных шумов является вероятностной задачей, и в области исследования процессов массового обслуживания.

Теперь рассмотрим некоторые задачи, которые помогут нам понять суть метода Монте-Карло. Решение задач мы будем осуществлять в программе, которая является базовой для любого компьютерного обеспечения, Excel.

Задачи на оценку надежности простейших систем

Все разнообразие систем связи можно объединить в типичную схему (рис. 1).

В технике информация передаётся с помощью электромагнитных, акустических и т.п. явлений. На конце передающей линии связи любого физического носителя вырабатываются различные колебания, которые направляются по каналу связи. Колебания могут быть монохроматические или с произвольно широкими и сложными спектрами.

Проходя по каналу связи, сигнал искажается помехам, в приемном устройстве на него налагаются еще флюктуационные шумы усилителей. Такие шумы появляются из-за теплового движения электронов. Так как двигаются они беспорядочно, то и вызванная таким движением разность потенциалов на концах носит случайный характер. Считается, что помеха от таких шумов представляет собой случайный процесс с нормальным распределением.

Суждение о сообщении, содержащееся в принятом сигнале, производится на выходе приемника путем измерения значения одной или нескольких физических величин [1].

Рис. 1. Схема систем связи

Рассмотрим пример решения задач, в котором производится оценка надежности простейших систем методом Монте-Карло.

Задача № 1.

Система состоит из двух блоков, соединенных последовательно. Система отказывает при отказе хотя бы одного блока. Первый блок содержит два элемента A, B (они соединены параллельно), и отказывает при отказе обоих элементов. Второй блок содержит один элемент C и отказывает при отказе этого элемента (рис. 2) [3].

а) Найти методом Монте-Карло оценку P^* надежности (вероятности безотказной работы) системы, зная вероятности безотказной работы элементов: $P(A) = 0,8; P(B) = 0,85; P(c) = 0,6$. Провести 50 испытаний.

б) Найти надежность системы P, вычисленную аналитически, и относительную погрешность.

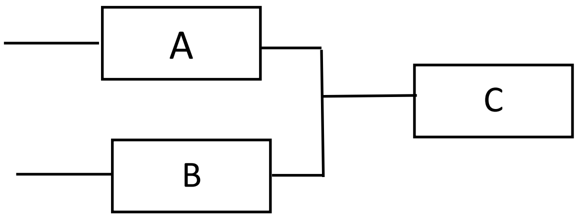

Рис. 2. Система двух блоков, соединённых последовательно

Решение.

Значения ячеек A, B, C получаем с помощью оператора рандомного (случайного) распределения чисел (рис. 3).

Правило. *Если случайное число больше или равно вероятности события, то событие не наступило.*

С помощью данного правила оцениваем работу блоков и системы. Заметим, что блок работает только тогда, когда работают два первых элемента, а система – при функционировании всех трех элементов.

C4 =СЛУЧМЕЖДУ(10;100)*0,01

Номер испытания	Блок	Случайные числа, моделирующие элементы			Заключение о работе				
					Элементы			Блоков	Систем
		А	Б	С	А	Б	С		
1	Первый Второй	0,72	0,15	0,10	+	+	+	+	+
2	Первый Второй	0,31	0,48	0,88	+	+	-	+	-
3	Первый Второй	0,46	0,19	0,28	+	+	+	+	+
4	Первый Второй	0,85	0,53	0,94	-	+	-	-	-
5	Первый Второй	0,93	0,84	1,00	-	+	-	-	-
6	Первый Второй	0,59	0,41	0,33	+	+	+	+	+
7	Первый Второй	0,22	0,43	0,82	+	+	-	+	-
8	Первый Второй	0,23	0,17	0,71	+	+	-	+	-

Лист1

Рис. 3. Оценка работы блоков системы

Проведя 50 испытаний, получим, что 18 раз система работала безотказно (рис. 4).

=СЧЁТЕСЛИ(J4:J53;"+")

Номер испытания	Блок	Случайные числа, моделирующие элементы			Заключение о работе							
					Элементы			Блоков	Систем			
		А	Б	С	А	Б	С				Безотказная работа	18
1	Первый Второй	0,72	0,15	0,10	+	+	+	+	+			

Рис. 4. Заключение о безотказной работе системы при 50 испытаниях

В качестве оценки искомой надежности P примем относительную частоту $P^* = \frac{18}{50} = 0,36$

Проводя это испытание несколько раз и изменяя значения случайно полученных чисел, мы будем получать различные результаты (рис. 5,6), а, следовательно, и надежность будет меняться, соответственно 0,30 и 0,34.

Номер испытания	Блок	Случайные числа, моделирующие элементы			Заключение о работе							
					Элементы			Блоков	Систем			
		А	Б	С	А	Б	С				Безотказная работа	15
1	Первый Второй	0,30	0,90	0,15	+	-	+	-	-			
2	Первый Второй	0,41	0,22	0,95	+	+	-	+	-			
3	Первый Второй	0,87	0,93	0,67	-	-	-	-	-			
4	Первый Второй	0,33	0,59	0,79	+	+	-	+	-			
5	Первый Второй	0,79	0,19	0,77	+	+	-	+	-			

Рис. 5. Результаты повторного испытания

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
Номер испытания	Блок	Случайные числа, моделирующие элементы			Заключение о работе										
					Элементы			Блоков	Систем						
		А	Б	С	А	Б	С				Безотказная работа			17	
1	Первый Второй	0,49	0,14	0,32	+	+	+	+	+						
2	Первый Второй	0,76	0,19	0,11	+	+	+	+	+						

Рис. 6. Результаты повторного испытания

Найдем надежность системы P аналитически. Вероятности безотказной работы первого и второго блоков равны:

$$P_1 = 1 - \overline{P(A)} \cdot \overline{P(B)} = 1 - 0,2 \cdot 0,15 = 0,97, \qquad P_2 = P(C) = 0,6.$$

Тогда вероятность безотказной работы системы будет равна:

$$P = P_1 \cdot P_2 = 0,97 \cdot 0,6 = 0,582.$$

Ответ: а) $P^* = 0,36$; б) $P = 0,582$.

Расчет систем массового обслуживания с отказами методом Монте-Карло

Следующая задача из области массового обслуживания. Изучение данных задач в последние десятилетия всё больше становится актуальным. Это задачи из таких областей как: телефония, организация производства, планирования, автоматического управления сложными агрегатами и др. [7]. Все эти задачи объединяет один фактор ─ наличие обслуживающей системы, на которую в случайные моменты поступают заявки. Обслуживающая представляет собой систему линий (каналов), выполняющих совокупность операций, подразумеваемых под словом «обслуживание». Предмет теории массового обслуживания ─ временные режимы, которые возникают в процессе обслуживания потока заявок, поступающих в систему. Поток ─ это последовательность заявок со специальным чередованием моментов их появления во времени.

Рассмотрим структуру алгоритма, моделирующего работу типичной системы массового обслуживания (рис. 7).

Пусть система состоит из n линий, на которые в случайные моменты времени t_i поступают заявки. Заявки образуют ординарный стационарный поток однородных событий с ограниченным последействием. Если в момент t_1 имеются свободные линии, то заявка принимается к обслуживанию и занимает одну из линий на время t_3. Заявка, заставшая все линии занятыми, остаётся в системе в течение времени t_n. Если в течение этого времени ни одна из линий не начнёт обслуживать заявку ─ заявка получает отказ.

Поступающие в систему заявки занимают свободные линии в порядке освобождения линии: данная линия не может быть занята до тех пор, пока остаются свободными те линии, которые освободились ранее данной. Если в момент освобождения линии имеются заявки в очереди, то к обслуживанию принимается та заявка, которая ранее других получит отказ, если не будет принята к обслуживанию [2,7].

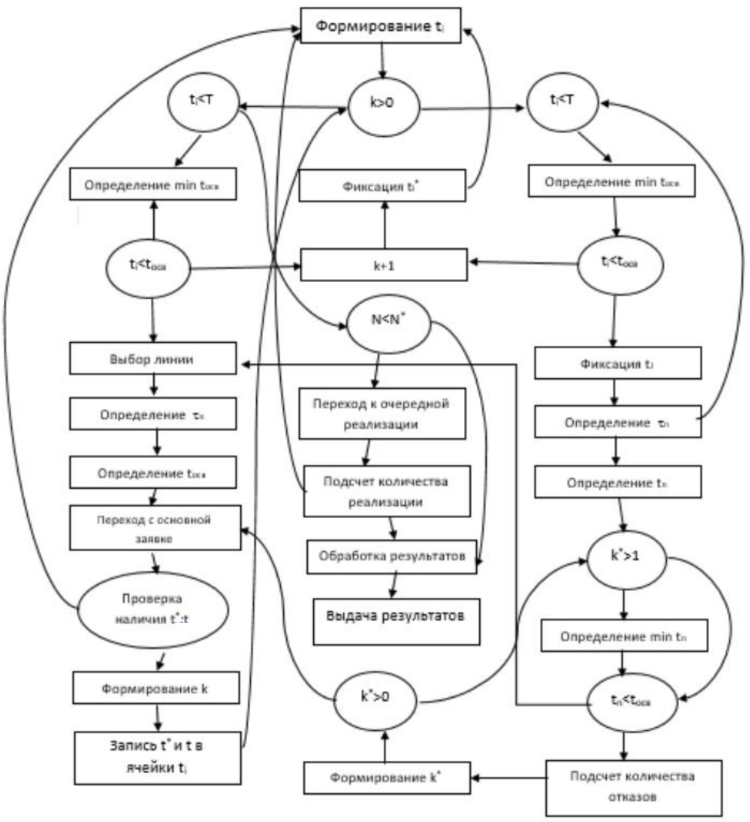

Рис. 7. Структура алгоритма, моделирующего работу типичной системы массового обслуживания

Многие задачи, связанные с этой областью, можно решать методом Монте-Карло. Для иллюстрации рассмотрим следующий пример.

Задача №2.

В трёх канальную систему массового обслуживания с отказами поступает поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону $f(t) = 5e^{-5\tau}$. Длительность обслуживания каждой заявки равна 0,5 мин. Найти методом Монте-Карло математическое ожидание a числа обслуживаемых заявок за время T =4 мин.

Решение.

С помощью генератора случайных чисел определяем значение r. Чтобы задать случайную величину, надо указать, какие значения она может принимать, и каковы вероятности этих значений. Тогда моменты поступления последующих заявок найдём по формуле:

$$T_i = T_{i-1} + \tau_i ,$$

где τ_i – длительность времени между двумя последовательными заявками с номерам $i-1$ и i . Возможные значения (время между двумя последовательными заявками) τ_i разыгрываем по формуле

$$\tau_i = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ln r_i = \left(\frac{1}{\lambda}\right)(-\ln r_i) .$$

Учитывая, что, по условию плотность вероятности $\lambda = 5$, получим $\tau_i = 0,2(-\ln r_i)$, где r_i –любое случайное число (рис. 8).

Номер заявки	Случайное число	ln	время между двумя последовательными заявками	момент поступления заявки
				0
1	0,59	0,53	0,11	0,11
2	0,38	0,97	0,19	0,30
3	0,43	0,84	0,17	0,47
4	0,57	0,56	0,11	0,58
5	0,04	3,22	0,64	1,22
6	0,01	4,61	0,92	2,15
7	0,77	0,26	0,05	2,20
8	0,18	1,71	0,34	2,54
9	0,14	1,97	0,39	2,93
10	0,55	0,60	0,12	3,05
11	0,14	1,97	0,39	3,45
12	0,04	3,22	0,64	4,09
13	0,04	3,22	0,64	4,73
14	0,55	0,60	0,12	4,85
15	0,78	0,25	0,05	4,90
16	0,02	3,91	0,78	5,69
17	0,96	0,04	0,01	5,69
18	0,62	0,48	0,10	5,79
19	0,41	0,89	0,18	5,97

Рис. 8. Генерирование случайных чисел с отказами

Далее расчеты мы будем производить вручную и заносить в таблицу 1. Пусть $T=0$ – момент поступления первой заявки. Заявка поступит в первый канал и будет им обслужена. Момент окончания обслуживания первой заявки $T_1+0,5=0+0,5=0,5$. Тогда вторая заявка будет обслужена вторым каналом, и время завершения обслуживания будет рано 0,61. Далее расчет производим аналогично.

Таким образом, мы можем определить количество заявок обслуженных первым, вторым и третьим каналом: $x_1=4, x_2=4, x_3=3$.

Выполнив аналогично ещё пять испытаний, мы получим, что первым каналом будет обслужено следующее количество заявок $x_1^{(2)}=6, x_1^{(3)}=6, x_1^{(4)}=6, x_1^{(5)}=7, x_1^{(6)}=7$.

В качестве оценки искомого математического ожидания a числа обслуженных заявок примем выборочную среднюю: $a=\overline{x}=(4+6+6+6+7+7)=6$.

Таблица 1. Расчеты и результаты задачи №2

	Номер заявки																			
канал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0,5			1,07		2,65			3,43											
2		0,61			1,72		2,69			3,55										
3			0,79					3,04			3,95									
обслужено	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	*Так как следующие заявки будут поступать во время которое превышает 4 минуты, им будет отказано*								

Заключение

В нашей действительности создание случайного процесса очень актуально, так как зачастую в некоторых задачах приходиться некоторому изучаемому процессу ставить в соответствие упрощенный искусственный процесс, моделируемый и в некотором смысле приближающий исходный процесс. Необходимость упрощения процесса обычно диктуется неполными сведениями о реальном процессе. Рассмотренный нами метод Монте-Карло позволяет моделировать случайный процесс. Суть данного метода состоит в том, что результат испытания зависит от значения некоторой случайной величины, распределенной по заданному закону. Поэтому результат каждого отдельного испытания также носит случайный характер. Проведя серию испытаний, получают множество частных значений наблюдаемой характеристики (выборку). Полученные статистические данные обрабатываются и представляются в виде численных оценок интересующих исследователя величин (характеристик системы). Метод статистических испытаний основан на предельных теоремах теории вероятностей (теорема Чебышева, теорема Пуассона, теорема Бернулли). При весьма большом числе испытаний данные теоремы гарантируют высокое качество статистических оценок, в этом их принципиальное значение.

Главное достоинство данного метода в том, что он эффективно справляется в тех задачах, где аналитические методы не дают ответа или если присутствует высокая неопределённость входных и выходных данных. Поэтому этот метод имеет широкое применение в различных областях, в частности в нашей статье рассмотрены задача из теории массового обслуживания и задача на оценку надёжности простейших систем.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бусленко М. Метод статистических испытаний/ Бусленко М.П., Голенко Д.И., Соболь И.М. Срагович В.Г., под редакцией Ю. А. Шрейдера. // Государственное издательство физико-математической литературы. – Москва, 1962. – С. 332.

2. Гефан Г.Д. Моделирование случайных процессов и систем массового обслуживания методом Монте-Карло/ Г.Д. Гефан, Е.А. Пальчик // Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем. – Иркутск: ИрГУПС, 2012. – Вып. 10. – С. 95-103.

3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике // учебное пособие. – 11-е изд., перераб.–М.:Высшее образование., 2008. С. 404.

4. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. // Учебное пособие для вузов. Изд. 7-е, стер.–М.:Высш. Шк., 2008. – С. 479.

5. Млодинов Л. (Не)совершенная случайность. Как случай управляет нашей жизнью. // М.: Livebook/Гаятри, 2010. – С. 352.

6. Соболь И.М. Метод Монте-Карло. // «Наука», 1972. («Популярные лекции по математике», вып.46). – С. 64.

7. Толстых О.Д. Цепи Маркова. Системы массового обслуживания. // Учебное пособие для студентов транспортных вузов. – Иркутск: ИрИИТ, 1999. –С. 204.

REFERENCES

1. Buslenko M.P., Golenko D.I., Sobol I.M. Sragovich V. G. Metod statisticheskikh ispytaniy [Statistical Test Method], *Gosudarstvennoye izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury* [*State publishing house of physical and mathematical literature*], pp. 332.

2. Gefan G.D., Palchik E.A. Modelirovaniye sluchaynykh protsessov i sistem massovogo obsluzhivaniya metodom Monte-Karlo [Modeling of random processes and queuing systems using the Monte Carlo method], *Informatsionnyye tekhnologii i problemy matematicheskogo modelirovaniya slozhnykh system* [*Information technology and problems of mathematical modeling of complex systems*] 2012, No 10, pp. 95-103.

3. Gmurman V.Ye. Rukovodstvo k resheniyu zadach po teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike [A guide to solving problems in probability theory and mathematical statistics], 2008, pp. 404.

4. Gmurman V.Ye. Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika. [Theory and Mathematical Statistics], *Uchebnoye posobiye dlya vuzov* [*Textbook for universities*], 2008, pp. 479.

5. Mlodinov L. (Ne)sovershennaya sluchaynost'. Kak sluchay upravlyayet nashey zhizn'yu [(Not) a complete coincidence. How chance rules our life], 2010, pp. 352.

6. Sobol' I. M. Metod Monte-Karlo [Monte Carlo Method] *«Nauka» («Populyarnyye lektsii po matematike»* [«*Science*» *(Popular Lectures on Mathematics*)], 1972, No 46, pp. 64.

7. Tolstykh O.D. Tsepi Markova. Sistemy massovogo obsluzhivaniya [Markov chains. Queuing systems], *Uchebnoye posobiye dlya studentov transportnykh vuzov* [*Textbook for students of transport universities*], 1999, pp. 204.

Информация об авторах

Москвитина Анастасия Вячеславовна студентка 2-го курса факультета «Строительство железных дорог», специальность «Управление качеством в производственно-технологических системах», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: 15nastya20@gmail.com

Феоктистова Маргарита Владимировна студентка 2-го курса факультета «Строительство железных дорог», специальность «Строительство магистральных железных дорог», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: bambuk09990@gmail.com

Толстых Ольга Дмитриевна к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедры «Математика», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: tolgad05@mail.ru

Author

Moskvitina Anastasia Vyacheslavovna – 2nd year student of the Faculty of Railway Construction, specialty «Quality Management in production and technological systems», Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: 15nastya20@gmail.com

Feoktistova Margarita Vladimirovna – 2nd year student of the Faculty of Railway Construction, specialty «Construction of Mainline Railways», Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: bambuk09990@gmail.com

Tolstykh Olga Dmitrievna – Ph. D. in Physico-Mathematics Sciences, Associate Professor, the Subdepartment of Mathematics, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: tolgad05@mail.ru

Для цитирования

Москвитина А.В., Феоктистова М.В., Толстых О.Д. Реализация метода Монте-Карло при исследовании случайных процессов // Молодая наука Сибири: электрон. науч. журн. — 2020. — №3(9). — Режим доступа: http://mnv.irgups.ru/toma/39-2020, свободный. — Загл. с экрана. — Яз. рус., англ. (дата обращения: 22.06.2020)

For citation

Moskvitina A.V., Feoktistova M.V., Tolstykh O.D. Implementation of the Monte-Carlo method in research random process. *Molodaya nauka Sibiri: ehlektronnyj nauchnyj zhurnal* [Young science of Siberia: electronic scientific journal], 2020, no. 3(9). [Accessed 22/06/20]