УДК: 517.926

***Р.А. Данеев*[1], *М.В. Русанов*[2]**

[1] *Восточно-Сибирский институт МВД России, г. Иркутск, Российская Федерация*
[2] *Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Российская Федерация*

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА НОРМАЛЬНО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Аннотация. *Определены некоторые положения методологии, лежащей в основе процедур реализации Калмана–Месаровича для динамических систем с уравнениями состояния в классе линейных автономных обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом контексте интерпретируются ключевые подходы к решению вопросов идентификации операторных спектров применительно к диссипативным моделям нормально-гиперболического типа.*
Ключевые слова: *динамическая система, дифференциальная модель реализации, спектр оператора.*

***R.A. Daneev*[1], *M.V. Rusanov*[2]**

[1] *East-Siberian Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Irkutsk, the Russian Federation*
[2] *Irkutsk State Railway Transport University, Irkutsk, the Russian Federation*

IDENTIFICATION OF THE DISCRETE SPECTRUM OF THE ELLIPTIC OPERATOR OF THE NORMAL-HYPERBOLIC SYSTEM

Annotation. *Some provisions of the methodology underlying the procedures for the Kalmana-Mesarovic realization for dynamical systems with equations of state in the class of linear autonomous ordinary differential equations are determined. In this context, key approaches to solving the questions of identification of operator spectra with respect to dissipative models of normal-hyperbolic type are interpreted.*
Key words: *dynamic system, differential implementation model, operator spectrum.*

Введение

Задача математического моделирования апостериорных динамических процессов возникает во многих разделах науки и техники и связана с задачей идентификации [1–4] сложных динамических систем. В этом контексте в статье будет дано строгое обоснование разрешимости задачи идентификации спектра эллиптического оператора моделируемой нормально-гиперболической системы. Её многие конструкции служат отправными точками развития общей теории многомерных систем управления [5], попутно создавая ей репутацию полезного инструмента в апостериорном математическом моделировании динамических систем, в частности, в вопросах адаптивной космодинамики [6]. В целом отметим, что потребность в построении качественной теории реализации распределенных нормально-гиперболических систем ощущалась давно в связи с развитием общих обратных задач математической физики.

1. Вспомогательные конструкции

Анализ теории идентификации для динамических объектов с распределёнными параметрами методологически оправдано начать с задачи «*спектральной идентификации*» поскольку именно спектральная теория операторов лежит в фундаменте модальной теории управления [5], нашедшей самое широкое применение в управлении реальными распределёнными системами, в частности больших космических конструкций. При этом в соответствии с общим направлением системного анализа к апостериорному моделированию будем обращать основное внимание на геометрическое содержание этих понятий, стараясь представить все результаты в терминах общих конструкций [4] идентификационного процесса в технологии «вход–выход». В свою очередь, постановка задач реализации и спектральной идентификации приводит к размышлению о том, как наиболее естественно формализовать динамику диссипативно-волновых процессов применительно к технологиям идентификации, в том числе, динамики упругого спутника гиростата [6]; так как тесное взаимодействие между абстрактным и конкретным представляет собой не только наиболее полезную, но и наиболее пленительную сторону теории идентификации.

Пусть $V := D \times T_\infty$ – бесконечный цилиндр, где $T_\infty := (t^0, \infty) \subset R, D$ – ограниченная открытая область в R^k с мерой Лебега μ^k и её граница dD – кусочно-гладкая функция. Следуя общепринятой символике, через $C^l([D]_R k)$, где $[\mathrm{D}]_R k$ – замыкание области D в R^k, обозначим пространство всех непрерывных вещественных функций на компакте $[\mathrm{D}]_R k$, обладающих непрерывными частными производными до l-го порядка включительно в точках этого компакта, через $D(V)$ (аналогично D(D)) – пространство всех вещественных бесконечно дифференцируемых финитных функций на V (соответственно, на D) со стандартной (неметризуемой секвенциально полной – определение 6.3 [7, с. 162]) на нём топологией, через $D(V)^*$ – пространство, топологически сопряжённое к $D(V)$.

Рассмотрим в цилиндре V движение волны $v(x,t)$, описываемое линейным неоднородным гиперболическим уравнением [8, с. 467] вида:

$$\begin{aligned}&\rho(x)\frac{d^2\nu(x,t)}{dt^2} = f(x)\frac{d\nu(x,t)}{dt} + div(r(x)grad(x)) - q(x)\nu(x,t) + \sum b_j(x)u_j(t) = \\ &=: f(x)\frac{d\nu(x,t)}{dt} - L(\nu(x,t)) + \sum b_j(x)u_j(t), \qquad j = 1,\ldots,m, \qquad (x,t)\in V\end{aligned} \tag{1}$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{cases} \nu(x,t)\big|_{t=t} 0 = \nu_0(x), \qquad \dfrac{d\nu(x,t)}{dt}\bigg|_{t=t} 0 = \nu_1(x), \qquad x\in[D]_R\, k, \\ \alpha(x)\nu(x,t) + \beta(x)\dfrac{d\nu(x,t)}{dn}\bigg|_{dD} = 0, \qquad t \ge t^0, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$f, \rho, q, b_j \in C([D]_R k), \qquad r \in C^1([D]_R k), \qquad \alpha,\beta \in C(dD)$$

$$\rho, r, (\alpha+\beta) \succ 0, \qquad q,\alpha,\beta \ge 0, \nu_0 \in C^2(D)\cap C^1([D]_R k), \nu_1 \in L_2(D,\mu^k,R)$$

и, наконец, укажем, что $u_j(\cdot) \in L_p([t^0,\infty], \mu, R), 1 \le p \le \infty$; здесь L_2 (соответственно, L_p) – обычное лебегово пространство классов эквивалентности всех μ-измеримых вещественных функций, суммируемых с квадратом (аналогично, p-ой степенью от модуля), n – внешняя нормаль к dD.

Всюду в дальнейшем считаем, что собственные функции $\{\phi_j\}$ эллиптического оператора L: $C^2(D)\cap C^1([D]_R k) \to L_2(D,\mu^k,R)$, удовлетворяющего смешанной задаче (1), (2), вещественны и образуют полную ортонормальную систему в $L_2(D,\eta_\rho,R)$, где мера $\eta_\rho(U) := \int_U \rho(x)\mu^k(dx_1 \times \ldots \times dx_k)$; достаточные условия, при которых реализуются эти предположения см., например, в [8, с. 331]. В такой постановке выполняются соотношения $L(\phi_j(\cdot)) = s_j\rho(\cdot)\phi_j(\cdot)$, где $\{s_j\}$ – собственные числа оператора L. Далее, функционал $\nu \in D(V)^*$ с представлением

$$(x,t) \to \nu(x,t) := \sum y_j(t)\phi_j(x), \qquad j = 1,2,\ldots, \qquad (x,t)\in V, \tag{3}$$

y_j – функция, абсолютно непрерывная на любом отрезке из $[t^0,\infty), y_j(t^0) = \prec \nu_0 \cdot \phi_j \succ_\rho, \dfrac{dy_j(t)}{dt}\bigg|_{t=t} 0 = \prec \nu_1 \cdot \phi_j \succ_\rho$, и $<\cdot>_\rho$, – операция скалярного произведения в гильбертовом пространстве $L_2(D,\eta_\rho,R)$, назовём *волновым динамическим процессом* в цилиндре V, если (3) – обобщённое решение [8, с. 492] задачи (1), (2).

Пусть $T:=[t_0,t_1]$ – отрезок числовой прямой R с мерой Лебега μ, $(X,d_X(\cdot,\cdot))$ – вещественное пространство Фреше (F-пространство, т.е. линейное локально выпуклое с топологией F_X, порождённой полной инвариантной метрикой d_X), X^+ – пространство, алгебраически сопряжённое к X , X^* – пространство, топологически сопряжённое к X, и X_σ – пространство X, снабжённое слабой топологией $\sigma(X,X^*)$, при этом будем говорить, что (X,F_X) – пространство типа F-(∗+), если $X\equiv(X^+)^+$, $X^*\equiv X^+$ и базис Гамеля в X^+ является счётным; в частности, любое R^m обладает типом F-(∗+) и всякое счётное произведение (декартово) пространств типа F-(∗+) является таковым с топологией произведения. Непрерывное отображение ϕ: $T\to X$ назовём слабо абсолютно непрерывным, если $\forall x^*\in X^*$ функция $\langle x^*,\phi(\cdot)\rangle_X$: $T\to R$, ($\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ – каноническая билинейная форма, устанавливающая двойственность между X и X^*) – абсолютно непрерывная; семейство всех таких отображений обозначим через $AC(T,X)$. Далее, будем говорить, что $x\in X$ – производная от функции ϕ: $T\to X$, и что функция $\phi(\cdot)$ дифференцируема в точке $t\in T$, если

$$\lim\left\{\tau-t\right|^{-1}\left(\phi(\tau)-\phi(t)x\right):\tau\to t,\tau\neq t,\tau\in T\right\}=0\in X$$

с рассмотрением предела в топологии F_X, при этом назовём $\phi(\cdot)$ дифференцируемой μ-почти всюду в T, если это справедливо при μ-почти всех $t\in T$; для производной от $\phi(\cdot)$ в t будем пользоваться символом $\dfrac{d\phi(t)}{dt}$ (соответственно, $\dfrac{d\phi(\cdot)}{dt}:=t\mapsto\dfrac{d\phi(t)}{dt}$.

Выделим к рассмотрению класс линейных систем управления, описываемых в F-пространстве состояний X дифференциальным уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+Bu(t),\qquad t\in T,\tag{4}$$

где $x(\cdot)\in AC(T,X),u(\cdot)\in L(T,\mu,R^m)$ – вектор-функция управления, $A\in L(X,X),B\in L(R^m,X)$; здесь ·=· – равенство μ-почти всюду, $L(X,X)$ – пространство всех линейных непрерывных операторов, действующих из X в X (соответственно $L(R^m,X)$ – из R^m в X), $L(T,\mu,R^m)$ – пространство классов эквивалентности (по mod μ) всех интегрируемых (в смысле Бохнера) отображений из T в R^m, при этом пару $(x(\cdot),u(\cdot))$, (удовлетворяющую (1)) назовём (A,B)-*отношением.*

О п р е д е л е н и е. *Сильной неопровержимой автономной* (A,B)*-моделью над* $N\subset AC(T,X)\times L(T,\mu,R^m)$ *назовём любую упорядоченную пару* $(A,B)\in L(X,X)\times L(R^m,X)$, *для которой дифференциальная система* (4) *включает множество* N *в класс своих допустимых* (A,B)*-отношений*.

В данном определении не утверждается (*a priori*), что все динамические процессы (пары «*траектория, управление*») в N суть некоторые (A,B)-отношения.

2. Существование дифференциальной модели реализации

Как обычно, через R^∞ обозначим топологическое произведение счётного семейства действительных прямых, которое, в силу предложения 6 [9], является пространством[1] типа F-(∗+), при этом $(R^\infty)_\sigma$ полно, через X обозначим F-(∗+)-пространство $R^\infty\times R^\infty$ (ясно, что $X=(X^+)^+$). Рассмотрим на интервале $T:=[t_0,t_1]\subset T_\infty$ в пространстве состояний X уравнение дифференциальной реализации (4) с $u(\cdot)\in L_p{}^m(T,\mu,R)$ и операторами A: $X\to X$ и B: $R^m\to X$ (в силу предложения 1 [9] операторы A и B непрерывные), имеющими следующую блочную структуру:

$$A:=\begin{bmatrix}0_\infty^\infty & id_{R^\infty}\\ -S & G\end{bmatrix},\qquad B:=\begin{bmatrix}0_m^\infty\\ B_m^\infty\end{bmatrix},\tag{5}$$

[1] Говорят, что пространство X имеет тип F-(∗+), если $X\equiv(X^+)^+$, $X^*=X^+$ и базис Гамеля в X^+ счетный.

где 0_∞^∞ и 0_m^∞ – нулевые операторы ($0_\infty^\infty : R^\infty \to R^\infty$ и $0_m^\infty : R^m \to R^\infty$), G: $R^\infty \to R^\infty$, S: $R^\infty \to R^\infty$ и B_m^∞: $R^m \to R^\infty$ – линейные операторы, у которых ij-ми элементами (в матричном представлении), соответственно, служат скалярные произведения:

$b_{ij}=\langle \phi_i \cdot b_j \rangle$ (для оператора B), $g_{ij}=\langle \phi_i \cdot f\phi_j \rangle$ (для оператора G),

$\langle \cdot \rangle$ – скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_2(D,\mu^k,R)$, при этом полагаем, что функции f и ϕ_j, j=1,2,… таковы, что для каждого индекса i все числа g_{ij}, за исключением конечного числа, равны 0;

$$s_{ij} \le \phi_i s_j \phi_j \succ_\rho = \begin{cases} s_j, i=j, \\ 0, i \ne j. \end{cases}$$ (для оператора S),

Если условиться, что $t \mapsto x(t) := \left(y(t), \frac{dy(t)}{dt} \right)$, где $t \mapsto y(t)$ в координатном разложении удовлетворяет (2), то уравнение (4), (5) получается из выражений (1)–(3) посредством канонической процедуры метода Фурье [8, с. 467] для задачи неоднородного уравнения нормально-гиперболического типа. Далее, по аналогии с терминологией из [5, с. 38], конечномерное подпространство $E \subset X$ назовём A-циклическим, если для оператора A из (5) эндоморфизм $A|E$ является циклическим. Также будем говорить, что A обладает рациональным блочно-диагональным представлением[2], если существует линейный изоморфизм W: $R^\infty \to X$, что $W^{-1}AW = \mathrm{diag}[A_1, A_2, \dots]$, где A_i (i=1,2,…) – квадратные матрицы конечной размерности.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $T := [t_0, t_1] \subset T_\infty$ $u(\cdot) \in L_p^m(T, \mu, R)$ *и оператор A из* (5) *обладает рациональным блочно-диагональным представлением. Тогда на T существует и единственно решение системы* (4), (5) *с любым* $x(t_0)$.

Теорема 1 [9] (о реализации (A,B)-модели в пространстве типа F-(∗+)) имеет конструктивную (с позиций построения адекватной численной процедуры) интерпретацию в варианте, когда Card N=1 (достаточном в большинстве прикладных задач) и пространство состояний X (в (4)) сужено до $W^{-1}AW$-циклического подпространства – R^n. Более того, в этой постановке её можно дополнить характеристическим признаком *единственности* автономной (A,B)-модели над N. При этом вариант $\aleph_0 >$Card $N \ne 1$ ($\aleph_0$ – алеф нуль), в силу теоремы 2 [9], по существу является прямым индуктивным расширением варианта Card N=1. Но прежде чем сформулировать это интерпретирующее утверждение, условимся (в целях удобства), что $L(T,\mu,R^m) := L_2^m(T, \mu, R)$, где $T := [0,\pi]$, $L_2(T,\mu,R)$ – пространство классов эквивалентности (по mod μ) всех вещественных μ-измеримых функций, суммируемых с квадратом на T, $N := \{(x^\#, u^\#)\} \subset AC(T,R^n) \times L_2^m(T,\mu,R)$, $D^\#$, $D^\#_k$ – определители Грама, построенные относительно систем $\{x_i^\#, u_j^\# : i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,m\}$ и $\left\{\frac{dx_k^\#}{dt}, x_i^\#, u_j^\# : i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,m\right\}$, где $col(x_i^\#) = x^\#, col(u_j^\#) = u^\#$, со скалярным произведением из $L_2(T,\mu, R)$ и (каноническое разложение Фурье [11, с. 393]):

$$\Theta := \left\{ z_i^- \in R^n : z_i^- = -i\int_T \cos(it) x^\#(t)\mu(dt), i = 1,2,\dots \right\},$$

$$\Xi := \left\{ z_i^+ \in R^{n+m} : z_i^+ = -i\int_T \sin(it) x^\#(t)\mu(dt), i = 1,2,\dots \right\}.$$

Т е о р е м а 2. *Пусть* $(x^\#, u^\#) \in AC(T, R^n) \times L_2^m(T, \mu, R)$. *Тогда:*

а) автономная (A,B)-модель над $(x^\#,u^\#)$ существует в том и только в том случае, если для всякого конечного набора Δ натуральных чисел, такого, что

$$rank\left[z_i^+\right]_{i\in\Delta} = Card\Delta - 1, z_i^+ \in \Xi,$$

---

[2] Оператор A будет таковым (т.е. существует приведение A к блочно-диагональной структуре), если, например, блочная структура (5) соответствует не диссипативному процессу в (1) ($f(\cdot) \equiv 0$), или когда демпфирование достигается за счёт соотношения $f(\cdot) = -c\rho(\cdot)$ (c=const>0).

из $\sum\alpha_i^+ z_I^+ = 0, i\in\Delta, \alpha_i^+\in R$ *следует* $\sum\alpha_i^+ z_i^- = 0, i\in\Delta u z_i^-\in\Theta$*, при этом* ($A$,$B$)*-модель будет единственной, если и только если* $D^{\#}\neq 0$;

б) автономная (A,B)*-модель над* ($x^{\#}$,$u^{\#}$) *существует и единственна при и только при условии, что*

$$\frac{dx_k^{\#}(t)}{dt}\in L_2(T,\mu,R), D^{\#}\neq 0, D_K^{\#}=0, k=1,..., n.$$

З а м е ч а н и е. *Во-первых*: проверку свойства $rank\left[z_i^+\right]_{i\in\Delta} = Card\Delta - 1$ можно осуществить, используя SVD-разложение (теорема 7.3.5 [10, с. 492]); необходимо предостеречь, – это свойство (как и $D_k^{\#}=0$) не является типическим [5, с. 52]. *Во-вторых*: поскольку «линейных материальных объектов» [3] в природе в «чистом виде» не бывает, то при апостериорном построении математических моделей динамики речь можно вести лишь о линейных приближениях и только в данном контексте о линейных динамических объектах. В этой связи, методологически пункт *а)* теоремы 2 позволяет конкретизировать практическую проверку обоснованности линеаризации с позиций выявления «изотропности»[4] математической структуры наблюдаемого физического процесса, связав её с формальным конструктивным признаком, на основании которого производится «оценка адекватности»[5] линеаризации модели динамики. Критерий этот, очевидно, следует связать с допуском на выбор множеств Δ, в частности, с «усечением» натурального ряда некоторым фиксированным натуральным числом k (т.е. неполная индукция) при задании множеств Δ, а именно, – $i\in\Delta\Rightarrow i\leq k$. *В-третьих,* кажущееся, на первый взгляд, возможное методологическое преимущество, обеспечиваемое утверждением *б)* в сравнении с предложением *а)*, не должно приводить нас к переоценке его потенциальной эффективности. В частности, если теоретико-множественная конструкция пары «*траектория, управление*» представлена в виде графика временной вектор-функции, то в этом случае индуктивному перебору по Δ из пункта *а)* в позиции *б)* может соответствовать более трудоёмкий вычислительный процесс дифференцирования координат x_k вектора состояния и проверки условий $\frac{dx_k}{dt}\in L_2(T,\mu,R), D_k^{\#}=0, k=1,\ldots,n$; небольшая практика здесь предпочтительнее длинных объяснений (см. также [12]).

3. Вычисление спектра эллиптического оператора

Пусть $\nu(x,t) := \sum_{j=1,\ldots,n} y_j(t)\phi_j(x), (x,t)\in D\times T_\infty$ – фиксированное обобщённое решение (3), отвечающее собственному движению ($u\equiv 0$) объекта (1) (согласно следствия 3 [9] эквивалентная траектория $t\mapsto x(t) := \left(y(t), \dfrac{dy(t)}{d(t)}\right)$ системы (4) с оператором A из (5) лежит в некото-

---

[3] Вариант «линейной» редакции теории математического моделирования динамических систем может служить подтверждением принципа фальсификации в концептуальном порядке критического рационализма Поппера, поскольку именно в этой редакции, как нельзя лучше, проявляются не только достижения научного подхода к построению математических моделей физического мира, но и их неизбежная гносеологическая ограниченность. И всё же, вопреки этому методологическому ограничению, теория линейных систем, бесспорно, заслуживает скрупулёзного изучения и даёт богатые возможности для понимания свойств моделей нелинейной динамики.

[4] Свойство *линеаризации* математической модели динамики «материального объекта» сродни свойству «памяти» модели о линейной структуре пространства произведения «*вход*×*выход*»; чем полнее (во времени и пространстве) модель охватывает математическую структуру физического явления, тем относительно более усиливается её субстанциональная компонента и ослабевает пространственно-императивный характер её поведения.

[5] Обоснование (скорее оправдание) выбора *линейности структуры* модели динамики сводится, как правило, к доказательству возможности линеаризации структуры уравнения состояний $F(x^{\#}+x,u^{\#}+u)\approx F(x^{\#},u^{\#})+A^{\#}x+B^{\#}u$ исследуемого объекта, т.е. исключительно к подтверждению инфинитезимального утверждения – $F(x^{\#}+x,u^{\#}+u)-F(x^{\#},u^{\#})-A^{\#}x-B^{\#}u=o((x,u))$ (т.е. ($A^{\#}x+B^{\#}u$) – дифференциал Фреше при (A,B)-модели ($A^{\#}$,$B^{\#}$)), и ни как (при этом) не учитывается характер производных отображения F высших порядков; более того, конструкция ≈ может быть оправдана формулой конечных приращений [11, с. 482] (т.е. (A,B)-модель – как производная Гато).

ром A-циклическом подпространстве), и пусть $\{\varphi_i \in D(\mathrm{D}): i=1,\ldots,n\}$ – фиксированное множество измерителей; система $\{\varphi_i\}_{i=1,\ldots,n}$ определяет геометрию мест датчиков съёмки информации с волнового процесса $v(\mathrm{x},t)$. В такой постановке для интервала наблюдения $T\subset T_\infty$ (величина T не существенна – теорема 5 [9]) рассмотрим задачу: *охарактеризовать наблюдения* $t\mapsto<v(\mathrm{x},t),\varphi_i(\mathrm{x})>_{D(\mathrm{D})}$: $T\to R$, $i=1,\ldots,n$, *по которым можно определить* n *элементов спектра* $\{s_j\}$ *оператора* L *уравнения* (1); данную задачу называют *спектральной идентификацией с индексом* n *для эллиптического оператора* L.

Пусть $c_{ij} := \prec \phi_j, \varphi_i \succ_{D(D)}, C := [c_{ij}] \in L(R^n, R^n)$. Через $w(t)$ обозначим вектор, доступный измерению посредством комплекса датчиков (системы $\{\varphi_i\}_{i=1,\ldots,n}$) согласно $w(t) := col(\prec v(x,t), \varphi_1(x) \succ_{D(D)}, \ldots, \prec v(x,t), \varphi_n(x) \succ_{D(D)}) = Cy(t)$, где $y(t) := col(y_1(t),\ldots, y_n(t))$, при этом считается, что матрица C невырожденная (что является типическим свойством [5, с. 52]). Тогда в силу (1)–(5) и метода Фурье [8] будет:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 y(t)}{dt^2} = \dfrac{Gdy(t)}{dt} - Sy(t); \\ w(t) = Cy(t), w(t) \in R^m, t \in T, \end{cases}$$

где, согласно блочно-матричного представления оператора A из (5), матрица G симметричная, а S диагональная с элементами по диагонали, равными s_j из спектра $\{s_j\}$. Таким образом, переформулировка задачи спектральной идентификации с индексом n оператора L из (1) выглядит так: *при a priori параметрически неизвестных матрицах* G, S, C *получить характеризацию вектора* $w(t)$, $t\in T:=[t_0,t_1]$, *позволяющего восстановить матрицу* S; с целью описания решения означенной задачи приведем аналитический результат.

Обозначим через $\Gamma^{\#}$ матрицу

$$\int_T \left[\frac{d^2 w(t)}{dt^2} \right] \times \left[col\left(w(t), \frac{dw(t)}{dt} \right) \right]' \mu(\mathrm{dt}),$$

Соответственно

$$\Gamma := \int_T \left[col\left(w(t), \frac{dw(t)}{dt} \right) \right] \times \left[col\left(w(t), \frac{dw(t)}{dt} \right) \right]' \mu(dt)$$

и разобьём данные матрицы на $n\times n$-блоки $\Gamma_i^{\#}$, Γ_{ij}, $i=1,2$, $j=1,2$:

$$\Gamma^{\#} =: [\Gamma_1^{\#}, \Gamma_2^{\#}]; \Gamma =: \begin{bmatrix} \Gamma_{11} \ldots \Gamma_{12} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \Gamma_{21} \ldots \Gamma_{22} \end{bmatrix}, H := \Gamma_{22} - \Gamma_{21}\Gamma_{11}^{-1}\Gamma_{22}.$$

Т е о р е м а 3. *Спектральная идентификация с индексом* n *эллиптического оператора уравнения* (1) *разрешима, если и только если минимальный многочлен вектора* $col\left(w(t), \frac{dw(t)}{dt} \right) t = t_0$ *относительно матрицы*

$$A^0 := \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ & \\ -CSC^{-1} & CGC^{-1} \end{bmatrix},$$

где 0_n *и* I_n – *соответственно нулевая и единичная* $n\times n$-*матрицы, имеет степень* $2n$. *В этом случае спектр матрицы* S *совпадает со спектром матрицы*

$$\left(\Gamma_2^{\#} H^{-1} \Gamma_{21} - \Gamma_1^{\#} \left(I_n + \Gamma_{11}^{-1}\Gamma_{12}H^{-1}\Gamma_{21} \right) \right) \Gamma_{11}^{-1}.$$

Заключение

Предложенная вниманию статья явилась развитием идей, изложенных в [4, 12], и преследовала несколько как общих, так и вполне конкретных целей; к числу последних относятся:

– алгоритм проверки гипотезы о наличии структурных свойств линейности и автономности у исследуемой непрерывной многомерной динамической системы, исходя из экспериментально наблюдаемых вектор-функций «*траектория, управление*»;

– решение задачи спектральной идентификации с индексом n для эллиптического оператора линейного диссипативного распределенного объекта.

Изложенные в статье идеи и методы могут быть расширены в следующих теоретико-прикладных направлениях:

– на развитие теории сильных автономных (A,B)-моделей в бесконечномерном гильбертовом пространстве, как подкласса банаховых (A,B)-моделей, определённых в [12]; в этом контексте имеется в виду симбиоз результатов работы с теоремой Хеллингера–Теплица [7] и теорией Какутани о распространении линейного оператора в унитарном пространстве;

– на анализ нелинейных систем, в частности, с ковариантно-тензорной многовалентной структурой уравнений состояний в F-(*+)-пространстве;

– на решение задачи спектральной идентификации с индексом n при «полном» (*собственное* + *вынужденное*) (A,B)-отношении.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1.Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1975. – 688 с.

2.Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. – М.: Наука, 1991. – 432 с.

3.Дмитриев А.В., Дружинин Э.И. Идентификация динамических характеристик непрерывных линейных моделей в условиях полной параметрической неопределенности // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1999. – № 3. – С. 44-52.

4.Rusanov V.A., Daneev A.V., Linke Yu.É., Sizykh V.N., Voronov V.A. System-theoretical foundation for identification of dynamic systems. I. // Far East Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – Vol. 106. – No. 1. P. 1–42.

5.Уонэм М. Линейные многомерные системы управления. – М.: Наука, 1980. – 376 с.

6.Rusanov V.A., Banshchikov A.V., Daneev A.V., Vetrov A.A., Voronov V.A. A posteriori simulation of dynamic model of the elastic element of satellite-gyrostat // Far East Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 101. – No. 9. – P. 2079–2094.

7.Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 448 с.

8.Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

9.Данеев А.В., Русанов В.А., Русанов М.В. От реализации Калмана–Месаровича к линейной модели нормально-гиперболического типа // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 6. – С. 137-157.

10. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.

11. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1988. – 544 с.

12. Данеев А.В., Русанов В.А., Русанов М.В., Сизых В.Н. К апостериорному моделированию нестационарных гиперболических систем // Известия Самарского научного центра РАН. – 2018. – Т. 20. – № 1. – С. 106–113.

REFERENCES

1. Eykhoff P. Bases of identification of control systems. - M.: World, 1975. - 688 pages.

2. Льюнг L. Identification of systems. The theory for the user. - M.: Science, 1991. - 432 pages.

3. Dmitriyev A.V., Druzhinin E.I. Identification of dynamic characteristics of continuous linear models in the conditions of full parametrical uncertainty//News of RAS. Theory and control systems. - 1999. - No. 3. - Page 44-52.

4. Rusanov V.A., Daneev A.V., Linke Yu.É., Sizykh V.N., Voronov V.A. System-theoretical foundation for identification of dynamic systems. I. // Far East Journal of Mathematical Sciences. - 2018. - Vol. 106. - No. 1. P. 1-42.
5. Uonem M. Linear multidimensional control systems. - M.: Science, 1980. - 376 pages.
6. Rusanov V.A., Banshchikov A.V., Daneev A.V., Vetrov A.A., Voronov V.A. A posteriori simulation of dynamic model of the elastic element of satellite-gyrostat // Far East Journal of Mathematical Sciences. - 2017. - Vol. 101. - No. 9. - P. 2079-2094.
7. Rudin U. Functional analysis. - M.: World, 1975. - 448 pages.
8. Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics. - M.: Science, 1981. - 512 pages.
9. Daneev A.V., Rusanov V. A., Rusanov M.V. From realization of Calman-Mesarovich to linear model of normal and hyperbolic type//Cybernetics and the system analysis. - 2005. - No. 6. - Page 137-157.
10. Horn R., Johnson Ch. Matrix analysis. - M.: World, 1989. - 655 pages.
11. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. - M.: Science, 1988. - 544 pages.
12. Daneev A.V., Rusanov V. A., Rusanov M.V., Grey V.N.K to a posteriori modeling of non-stationary hyperbolic systems // News of the Samara scientific center RAS. - 2018. - T. 20. - No. 1. - Page 106-113.

Информация об авторах

Данеев Роман Алексеевич - к. т. н., преподаватель кафедры «Информационно-правовых дисциплин», Восточно-Сибирский институт МВД России, г. Иркутск, e-mail: daneev@mail.ru
Русанов Марк Вячеславович - аспирант кафедры ИСиЗИ ИрГУПС, г. Иркутск, e-mail: v_rusanov@mail.ru

Authors

Roman Alekseevich Daneev – Ph.D. in Engineering Science, teacher of department of "Information and legal disciplines", East Siberian institute of the Ministry of Internal Affairs of the Russian Federation, Irkutsk, e-mail: daneev@mail.ru
Mark Vyacheslavovich Rusanov – postgraduate student of department of IS&ID IRGUPS, Irkutsk, e-mail: v_rusanov@mail.ru

Для цитирования

Данеев Р. А. Идентификация дискретного спектра эллиптического оператора нормально-гиперболической системы [Электронный ресурс] / Р. А. Данеев, М.В. Русанов // Молодая наука Сибири: электрон. науч. журн. — 2018. — №1. — Режим доступа: http://mnv.irgups.ru/toma/11-2018, свободный. — Загл. с экрана. — Яз. рус., англ. (дата обращения: 13.09.2018)

For citation

Daneev R.A., Rusanov M.V. *Identificatsia discretnogo spectra ellipticheskogo operatora normalno-hyperbolicheskoi sistemi* [Identification of the discrete spectrum of the elliptic operator of a normally hyperbolic system]. *Molodaya nauka Sibiri: ehlektronnyj nauchnyj zhurnal* [Young science of Siberia: electronic scientific journal], 2018, no. 1. [Accessed 13/09/18]